§2. Tích phân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tích phân và tính chất

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là *tích phân từ a đến b* (hay tích phân xác định trên đoạn $[a\ ;\ b]$) của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy ta có $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ $\left(\text{hay } F(x)\Big|_a^b\right)$.

➤ **Chú ý**

1) Trường hợp $a = b$, ta định nghĩa $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Trường hợp $a > b$, ta định nghĩa $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2) Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ hay } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \ldots \text{ đều bằng } F(b) - F(a).$$

Tính chất của tích phân

Tính chất 1

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k \text{ là hằng số}).$$

Tính chất 2

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Tính chất 3

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,\ a < c < b.$$

Chú ý

Mở rộng của tính chất 3 :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_n}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x$$

$(a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b)$.

2. Phương pháp tính tích phân

b) Phương pháp đổi biến số

Định lí 1. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha\,;\,\beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ và $a \le \varphi(t) \le b,\ \forall t \in [\alpha\,;\,\beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Định lí 2. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ sao cho $\alpha \le u(x) \le \beta,\ \forall x \in [a\,;\,b]$. Nếu $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $\forall x \in [a;b]$, trong đó $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha\,;\,\beta]$ thì

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

a) Phương pháp tính tích phân từng phần

Định lí 1. Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$, thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

hay $$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

Chú ý

Nếu $\alpha > \beta$ thì ta xét đoạn $[\beta\,;\,\alpha]$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ nhờ đổi biến $x=\sin t$.

Giải

Đổi biến số $x = \sin t$, ta được $x' = \cos t$ và khi $x = 0$ thì lấy $t = 0$; khi $x = 1$ thì lấy $t = \frac{\pi}{2}$. Do đó

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t.\cos^2 t\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

• ***Ví dụ 2***

Tính $\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx$ nhờ đổi biến $x=\pi-t$.

Giải

Đổi biến số $x = \pi - t$, ta được $x' = -1$ và khi $x=0$ thì $t=\pi$; khi $x=\pi$ thì $t=0$. Do đó

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx = -\int_{\pi}^{0} \frac{-\sin 4t}{1+\sin t}\,dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin 4t}{1+\sin t}\,dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx.$$

Do đó $2\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx = 0$. Vậy $\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}\,dx = 0$.

• ***Ví dụ 3***

Tính $\int_1^{e} \sqrt{x}\ln x\,dx$.

Giải

Đặt $u = \ln x$ và $\mathrm{d}v = \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ và $v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Vậy

$$\int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{2}{3}\int_1^{\mathrm{e}} x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{2}{9}\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} + 2\right).$$

• ***Ví dụ 4***

Tính $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x)\mathrm{d}x.$$

Giải

Đặt $u = \ln(\sin x)$ và $\mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x$, ta được $\mathrm{d}u = \dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ và $v = \sin x$. Do đó

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ln(\sin x)\mathrm{d}x = \sin x.\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$$

$$= \sin x.\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

C. BÀI TẬP

3.9. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_0^1 (y^3 + 3y^2 - 2)\mathrm{d}y$;

b) $\displaystyle\int_1^4 \left(t + \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_0^1 (3^s - 2^s)^2\mathrm{d}s$;

e) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 3x\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos 3x\mathrm{d}x$; g) $\int\limits_{0}^{3} \left|x^2 - x - 2\right| \mathrm{d}x$;

h) $\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} \mathrm{d}x$.

3.10. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số :

a) $\int\limits_{1}^{2} x(1-x)^5 \mathrm{d}x$ (đặt $t = 1 - x$) ;

b) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$) ;

c) $\int\limits_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$) ;

d) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$ (đặt $u = \sqrt{x^2 + x + 1}$) ;

e) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \frac{1}{x}$) ;

g) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ (đặt $x = \pi - t$).

3.11. Áp dụng phương pháp tính tích phân từng phần, hãy tính các tích phân sau :

a) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{0}^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_{0}^{1} \ln(2x+1)\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_{2}^{3} [\ln(x-1) - \ln(x+1)]\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$;

g) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin^2 x dx$;

h) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$;

i) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{1+x\ln x}{x}e^x dx$.

3.12. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n \sin \pi x dx = 0.$$

3.13. Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ cho bởi

$$f(x)=\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}dt,\ x\in \mathbb{R}$$

là hàm số chẵn.

3.14. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-a\ ;\ a]$. Chứng minh rằng

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}2\displaystyle\int_0^a f(x)dx & \text{nếu } f \text{ là hàm số chẵn,}\\ 0 & \text{nếu } f \text{ là hàm số lẻ.}\end{cases}$$

Áp dụng để tính $\displaystyle\int_{-2}^{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

3.15. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

3.16. Đặt $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $\quad I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2},\ n>2.$

3.17. Đặt $I_{m,n} = \int\limits_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$, $m, n \in$ ¥ *. Chứng minh rằng

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}, \quad m > 0, n > 1.$$

3.18. Hãy chỉ ra kết quả nào dưới đây đúng :

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \, dx + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x \, dx = 0$;

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\cos x}\right) dx = 0$;

c) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1-x}{1+x} \, dx = 0$;

d) $\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{1 + x + x^2 + x^3} + 1 \right) dx = 0$.