§3.

1.15. a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 8$ trên đoạn $[0 ; 1]$.

$$f'(x) = -6x + 4,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{20}{3}, \qquad f(0) = -8, \qquad f(1) = -7.$$

Vậy $\min\limits_{[0\,;\,1]} f(x) = -8$; $\max\limits_{[0\,;\,1]} f(x) = -\dfrac{20}{3}$.

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn $[-4 ; 3]$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $f_{CĐ} = f(-3) = 20$; $f_{CT} = f(1) = -12$; $f(-4) = 13$; $f(3) = 20$.

Vậy $\min\limits_{[-4\,;\,3]} f(x) = -12$; $\max\limits_{[-4\,;\,3]} f(x) = 20$.

c) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ trên đoạn $[-4 ; 4]$.

$f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$; $f'(x) > 0$ trên khoảng $(-4 ; 0)$ và

$f'(x) < 0$ trên khoảng $(0 ; 4)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $f_{CĐ} = 5$.

Mặt khác, ta có $f(-4) = f(4) = 3$.

Vậy $\max\limits_{[-4\,;\,4]} f(x) = 5$, $\min\limits_{[-4\,;\,4]} f(x) = 3$.

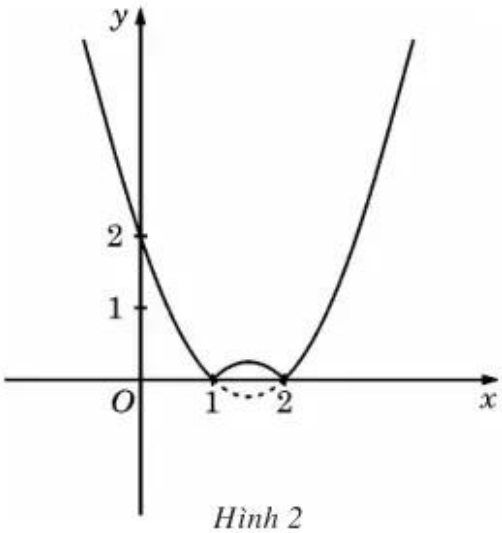
d) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ trên đoạn $[-10 ; 10]$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

Ta có

$$g'(x) = 2x - 3;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

x	-10		1		$\frac{3}{2}$		2		10
$g'(x)$		$-$	|	$-$		$+$	|	$+$	
$g(x)$		↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	



Hình 2

Vì $f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ khi } x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ -g(x) \text{ khi } x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$

nên ta có đồ thị của $f(x)$ như Hình 2.

Từ đồ thị suy ra

$$\max_{[-10\,;\,10]} f(x) = f(-10) = 132,$$

$$\min_{[-10\,;\,10]} f(x) = f(1) = f(2) = 0.$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

$f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, $f'(x) < 0$ trên $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $f'(x) > 0$ trên $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right]$

nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{2}$ và $f_{CT} = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Mặt khác, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 2$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 1$.

g) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = \dfrac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Ta có $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi) = 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

Từ đó ta có $\max\limits_{\left[0\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{\left[0\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = -2$.

1.16. a) $y = \frac{x}{4 + x^2}$ trên $(-\infty\,;\,+\infty)$.

$$y' = \frac{4 - x^2}{\left(4 + x^2\right)^2}\,;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Từ đó ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{4}$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{4}$.

b) $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right)$.

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y'	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
y	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất. Giá trị lớn nhất của hàm số là

$$\max_{\left(\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right)} y = y(\pi) = -1.$$

c) $y = \frac{1}{1 + x^4}$ trên khoảng $(-\infty\,;\,+\infty)$.

$$y' = \frac{-4x^3}{\left(1 + x^4\right)^2}\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất. Giá trị lớn nhất của hàm số là

$$\max_{\mathbb{R}} y = y(0) = 1.$$

d) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0\ ;\ \pi)$.

$$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x},\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
y	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

Hàm số không có giá trị lớn nhất. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là

$$\min_{(0\ ;\ \pi)} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

1.17. Cho $m > 0$. Đặt x là số thứ nhất, $0 < x < m$, số thứ hai là $m - x$.

Xét tích $\quad P(x) = x(m - x)$.

Ta có $\quad P'(x) = -2x + m$,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{m}{2}$		m
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$\nearrow$	$\frac{m^2}{4}$	$\searrow$	

Từ đó ta có giá trị lớn nhất của tích hai số là

$$\max_{(0\,;\,m)} P(x) = P\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4}.$$

1.18. Gọi một trong hai số phải tìm là x, ta có số kia là $x + 13$.

Xét tích $p(x) = x(x+13) = x^2 + 13x$;

$$p'(x) = 2x + 13\,;\ p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{13}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{13}{2}$		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{169}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy tích hai số là bé nhất khi một số là $-\frac{13}{2}$ và số kia là $\frac{13}{2}$.

1.19. $s = 6t^2 - t^3, t > 0.$

Vận tốc chuyển động là $v = s'$, tức là $v = 12t - 3t^2$.

Ta có $\quad v' = 12 - 6t,$

$\quad v' = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Hàm số v đồng biến trên khoảng $(0\,;\,2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2\,;\,+\infty)$.

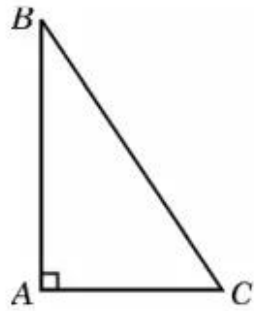
Vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 2$. Khi đó $\max\limits_{(0\,;\,+\infty)} V = V_{CĐ} = v(2) = 12$(m/s).

1.20. (H.3) Kí hiệu cạnh góc vuông AB là $x, 0 < x < \frac{a}{2}$.

Khi đó, cạnh huyền $BC = a - x$, cạnh góc vuông kia là

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2}$$

hay $\quad AC = \sqrt{a^2 - 2ax}.$



Hình 3

Diện tích tam giác ABC là

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}.$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2ax} - \frac{1}{2}\frac{ax}{\sqrt{a^2 - 2ax}} = \frac{a(a - 3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Tam giác có diện tích lớn nhất khi $AB = \frac{a}{3}$, $BC = \frac{2a}{3}$.