§3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cách tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) trên một đoạn

ĐỊNH LÍ

$y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b] \Rightarrow$ tồn tại $\max\limits_{[a\ ;\ b]} f(x)$, $\min\limits_{[a\ ;\ b]} f(x)$.

Cách tìm

• Tìm $x_i \in [a\ ;\ b]$ $(i = 1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ n)$ tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

• Tính $f(a), f(b), f\left(x_i\right)$, $(i = 1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ n)$.

• Tìm $\max\limits_{[a\ ;\ b]} f(x) = \max\left\{f(a), f\left(x_1\right), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)\right\}$;

$\min\limits_{[a\ ;\ b]} f(x) = \min\left\{f(a), f\left(x_1\right), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)\right\}$.

2. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên một khoảng

$y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a\ ;\ b)$, ta xét hai trường hợp :

x	a		x_0		b
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$	GTNN	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
y'		$+$		$-$	
y		$\nearrow$	GTLN	$\searrow$	

(trong đó $f'(x_0)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0).

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số sau trên đoạn $[-3\ ;\ 3]$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10.$$

Giải

Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3\ ;\ 3]$,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12,$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Tính $f(-3) = -35\ ;\ f(3) = 1\ ;\quad f(-1) = 17\ ;\ f(2) = -10.$

Từ đó

$$\max_{[-3\ ;\ 3]} f(x) = f(-1) = 17,$$

$$\min_{[-3\ ;\ 3]} f(x) = f(-3) = -35.$$

• ***Ví dụ 2***

Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

Giải

Kí hiệu chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h, r và V. Khi đó, $V = \pi r^2 h$.

Vì $\quad r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$ nên $\quad V = \pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(R^2h - \dfrac{h^3}{4}\right)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$V(h) = \pi\left(R^2h - \frac{h^3}{4}\right),\ h \in (0\ ;\ 2R).$$

Ta có $\quad V'(h) = \pi\left(R^2 - \dfrac{3h^2}{4}\right)$;

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên

h	0		$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

$$\max_{(0\ ;\ 2R)} V = V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Khi đó, thể tích hình trụ là $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

C. BÀI TẬP

1.15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 8$ trên đoạn $[0 ; 1]$;

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn $[-4 ; 3]$;

c) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ trên đoạn $[-4 ; 4]$;

d) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ trên đoạn $[-10 ; 10]$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{6}\right]$;

g) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0 ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

1.16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x}{4 + x^2}$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$;

b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

c) $y = \dfrac{1}{1 + x^4}$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$;

d) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0 ; \pi)$.

1.17. Cho số dương m. Hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

1.18. Tìm hai số có hiệu là 13 sao cho tích của chúng là bé nhất.

1.19. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = 6t^2 - t^3$. Tính thời điểm t (giây) tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

1.20. Hãy tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a ($a > 0$).