§3. Lôgarit

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thoả mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

2. Các tính chất

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1 \ ;$$

$$a^{\log_a b} = b, \ \log_a(a^{\alpha}) = \alpha.$$

3. Các quy tắc tính

• Với các số dương a, b_1, b_2 và $a \neq 1$, ta có

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 \ ;$$

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2 .$$

• Với các số dương a, b và $a \neq 1$, $\alpha \in$ ¡ , $n \in$ ¥ *, ta có

$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$; $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$.

• Với các số dương a, b, c và $a \neq 1$, $c \neq 1$, ta có

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $(b \neq 1)$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$ $(\alpha \neq 0)$.

4. Lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên

$\log_{10} x = \lg x$ hoặc $\log_{10} x = \log x$; $\log_e x = \ln x$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính

a) $3^{5\log_3 2}$; b) $\log_3 \log_2 8$;

c) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

Giải

a) $3^{5\log_3 2} = 3^{\log_3 2^5} = 2^5 = 32.$

b) $\log_3 \log_2 8 = \log_3 \log_2 2^3 = \log_3 3 = 1.$

c) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45} =$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 6^2 - \log_{\frac{1}{3}} 400^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{45}\right)^3$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 36 - \log_{\frac{1}{3}} 20 + \log_{\frac{1}{3}} 45$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{36.45}{20} = \log_{\frac{1}{3}} 81 = -\log_3 3^4 = -4.$$

• ***Ví dụ 2***

Cho a và b là các số dương. Tìm x, biết :

a) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$; b) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$.

Giải

Với a và b là các số dương, ta có :

a) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 = \log_3\left(a^4b^7\right)$.

Vậy $x = a^4b^7$.

b) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b = \log_{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} + \log_{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{7}} = \log_{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{4}{7}}\right)$.

Vậy $x = a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{4}{7}}$.

• ***Ví dụ 3***

Cho $\log_2 5 = a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a.

Giải

Ta có $\log_4 1250 = \log_{2^2}\left(2.5^4\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(2.5^4\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\log_2 2 + \log_2 5^4\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 4\log_2 5\right)$.

Vậy $\log_4 1250 = \frac{1}{2}(1 + 4a)$.

• ***Ví dụ 4***

Cho $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$. Chứng minh rằng $ab + 5(a - b) = 1$.

Giải

Ta có $a = \log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$.

Suy ra $\log_2 3 = \frac{2a - 1}{2 - a}$. (1)

(Hiển nhiên $2 - a \neq 0$ vì $\log_{12} 18 < \log_{12} 12^2 = 2$).

Tương tự, $$b = \log_{24} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{1 + 3\log_2 3}{3 + \log_2 3}.$$

Suy ra $$\log_2 3 = \frac{3b - 1}{3 - b}. \qquad (2)$$

(Hiển nhiên $b \neq 3$, vì $\log_{24} 54 < \log_{24} 24^3 = 3$).

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{2a - 1}{2 - a} = \dfrac{3b - 1}{3 - b}$

hay $6a - 2ab - 3 + b = 6b - 3ab - 2 + a.$

Vậy $ab + 5(a - b) = 1.$

• ***Ví dụ 5***

Cho $\log_a x = p$, $\log_b x = q$, $\log_{abc} x = r$. Hãy tính $\log_c x$ theo p, q, r.

Giải

Nếu $x = 1$ thì $\log_c x = 0$.

Nếu $x \neq 1$, từ đề bài suy ra $\log_x abc = \dfrac{1}{r}$

hay $\log_x a + \log_x b + \log_x c = \dfrac{1}{r}.$

Do đó $\log_x c = \dfrac{1}{r} - \log_x a - \log_x b = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q},$

hay $$\log_c x = \frac{1}{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}}.$$

• ***Ví dụ 6***

Hãy so sánh :

a) $\dfrac{1}{2} + \log 3$ với $\log 19 - \log 2$; b) $\log \dfrac{5 + \sqrt{7}}{2}$ với $\dfrac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2}$.

Giải

a) Ta có $$\alpha = \frac{1}{2} + \log 3 = \frac{1}{2}\log 10 + \log 3 = \log 3\sqrt{10}$$

nên $3\sqrt{10} = 10^{\alpha}$;

$\beta = \log 19 - \log 2 = \log\frac{19}{2}$ nên $\frac{19}{2} = 10^{\beta}$.

Ta so sánh hai số $3\sqrt{10}$ và $\frac{19}{2}$.

Ta có $\left(3\sqrt{10}\right)^2 = 9.10 = 90 = \frac{360}{4}$,

$\left(\frac{19}{2}\right)^2 = \frac{361}{4}$

nên $3\sqrt{10} < \frac{19}{2}$.

Suy ra $10^{\alpha} < 10^{\beta}$.

Theo tính chất của luỹ thừa với số mũ thực, cơ số lớn hơn 1, ta có $\alpha < \beta$.

Vậy $\frac{1}{2} + \log 3 < \log 19 - \log 2$.

b) Ta có $\frac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2} = \log\left(5\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \log\sqrt{5\sqrt{7}}$.

Đặt $\alpha = \log\sqrt{5\sqrt{7}}$ thì $\sqrt{5\sqrt{7}} = 10^{\alpha}$.

Đặt $\beta = \log\frac{5+\sqrt{7}}{2}$ thì $\frac{5+\sqrt{7}}{2} = 10^{\beta}$.

So sánh hai số $\sqrt{5\sqrt{7}}$ và $\frac{5+\sqrt{7}}{2}$,

ta có $\sqrt{5\sqrt{7}}^2 = 5\sqrt{7}$,

$\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{32+10\sqrt{7}}{4} = 8 + \frac{5}{2}\sqrt{7}$.

Xét hiệu $8 + \frac{5}{2}\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = 8 - \frac{5}{2}\sqrt{7} = \frac{16 - 5\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{256} - \sqrt{175}}{2} > 0$

nên $8 + \frac{5}{2}\sqrt{7} > 5\sqrt{7}$.

Suy ra $\frac{5+\sqrt{7}}{2} > \sqrt{5\sqrt{7}}$.

Từ đó $10^{\beta} > 10^{\alpha}$.

Vậy $\beta > \alpha$, tức là $\log\frac{5+\sqrt{7}}{2} > \frac{\log 5 + \log\sqrt{7}}{2}$.

C. BÀI TẬP

2.12. Tính :

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$;

b) $10^{3-\log 5}$;

c) $2\log_{27}\log 1000$;

d) $3\log_2\log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

2.13. Tính :

a) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

b) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$;

c) $\dfrac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$.

2.14. Tìm x, biết :

a) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$.

2.15. a) Cho $a = \log_3 15$, $b = \log_3 10$. Hãy tính $\log_{\sqrt{3}} 50$, theo a và b.

b) Cho $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_7 2$. Hãy tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c.

2.16. Hãy so sánh mỗi cặp số sau :

a) $\log_3 \frac{6}{5}$ và $\log_3 \frac{5}{6}$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ và $\log_{\frac{1}{3}} 17$;

c) $\log_{\frac{1}{2}} e$ và $\log_{\frac{1}{2}} \pi$;

d) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ và $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.17. Chứng minh rằng :

a) $\log_{a_1} a_2 . \log_{a_2} a_3 . \log_{a_3} a_4 ... \log_{a_{n-1}} a_n = \log_{a_1} a_n$.

b) $\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \dfrac{1}{\log_{a^3} b} + ... + \dfrac{1}{\log_{a^n} b} = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a b}$.