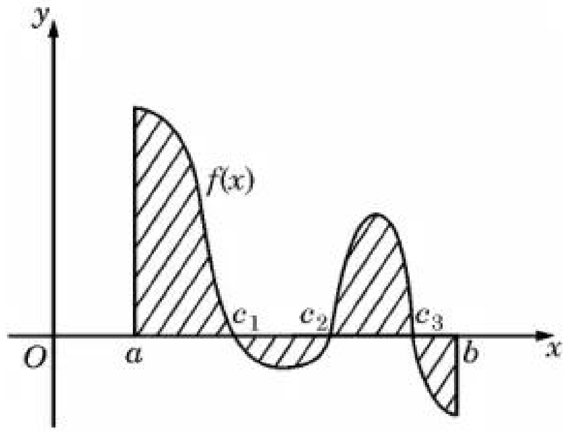
§3. Ứng dụng hình học của tích phân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

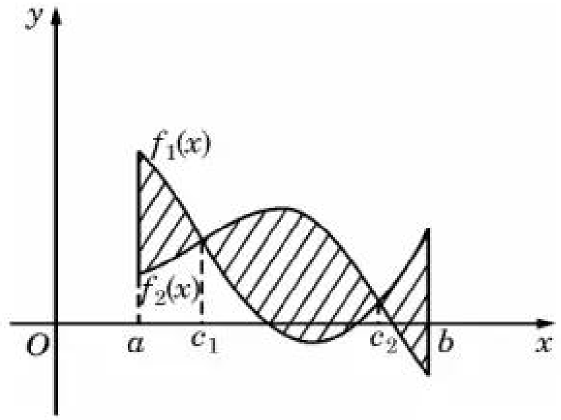
1. Diện tích hình phẳng

Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.64), thì diện tích S được cho bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$



Hình 64



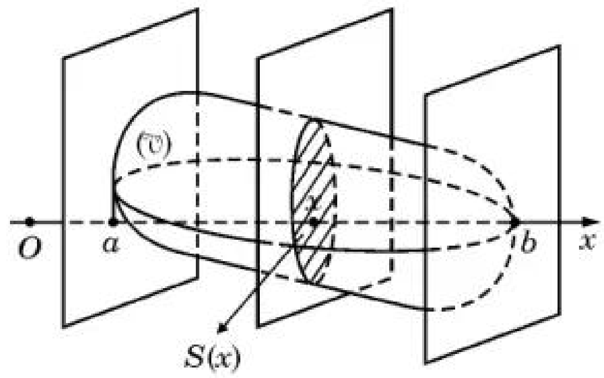
Hình 65

Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.65) thì diện tích S được cho bởi công thức

$$S = \int_a^b \left|f_1(x) - f_2(x)\right| \mathrm{d}x\,.$$

2. Thể tích của vật thể

Một vật thể $\mathcal{V}$ được giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x = a\ ;\ x = b$ $(a \leq b)$. $S(x)$ là diện tích thiết diện của $\mathcal{V}$, vuông góc với trục Ox tại $x \in [a\ ;\ b]$ (H.66). Thể tích V của vật thể $\mathcal{V}$ được cho bởi công thức



Hình 66

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x\,,$$

(với $S(x)$ là hàm số không âm, liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$).

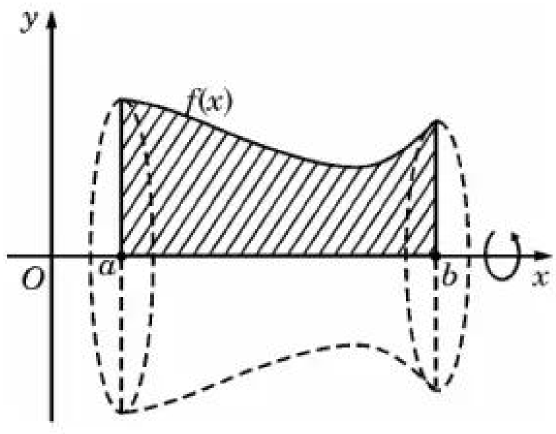
3. Thể tích khối tròn xoay

Cho hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay (H.67). Thể tích V_x của hình tròn xoay này được cho bởi công thức

$$V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Nếu đổi vai trò của x cho y, ta được

$$V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\,\mathrm{d}y.$$



Hình 67

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường

$$y = x^2 - 2x \text{ và } y = x.$$

Giải

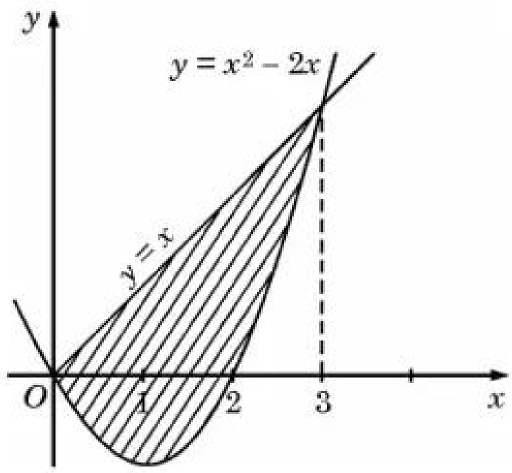
Tìm hoành độ các giao điểm của hai đường, ta có

$x^2 - 2x = x \Rightarrow x = 0$ và $x = 3$, (H.68).

Vậy diện tích S của hình phẳng bằng

$$S = \int_0^3 (x - x^2 + 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$



Hình 68

• ***Ví dụ 2***

Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường

$$y = \frac{10}{3}x - x^2 \text{ và } y = \begin{cases} -x & \text{nếu } x \le 1 \\ x - 2 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Giải

(H.69) Tìm hoành độ các giao điểm.

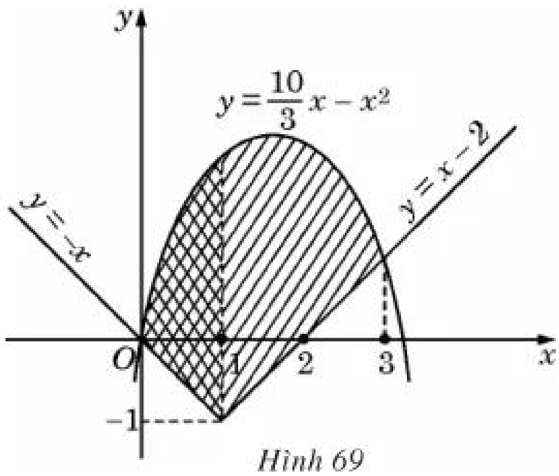
Từ $\frac{10}{3}x - x^2 = -x$, ta có $x = 0$.

Từ $\frac{10}{3}x - x^2 = x - 2$, ta có $x = 3$.

Vậy diện tích S của hình phẳng là

$$S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2\right)\mathrm{d}x = \frac{13}{2}.$$



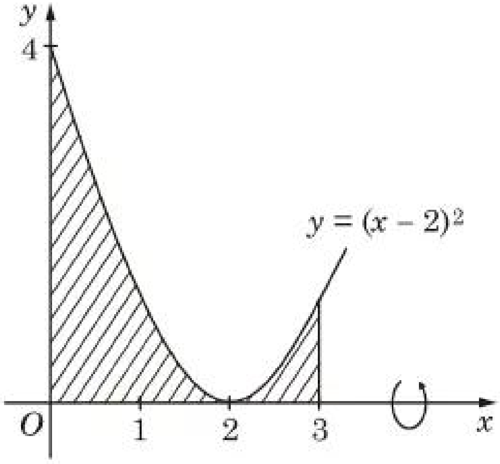
Hình 69

• ***Ví dụ 3***

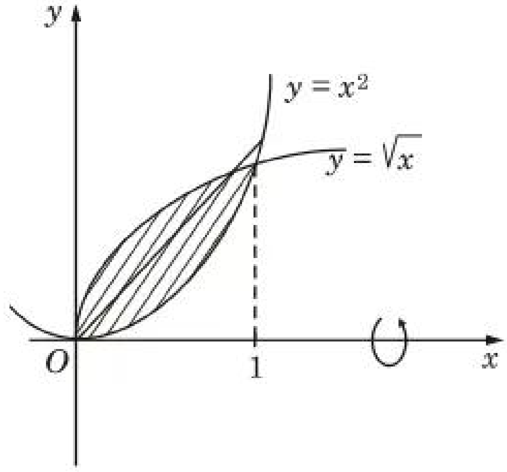
Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ (H.70).

Giải

Ta có $V_x = \pi\int_0^3 (x-2)^4\,\mathrm{d}x = \pi\left.\frac{(x-2)^5}{5}\right|_0^3 = \frac{33\pi}{5}$.



Hình 70



Hình 71

• ***Ví dụ 4***

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $x = y^2$ (H.71).

Giải

Ta có

$$V_x = \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^1 (x - x^4)\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{10}.$$

C. BÀI TẬP

3.19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

a) $y = 2x - x^2$, $x + y = 2$;

b) $y = x^3 - 12x$, $y = x^2$;

c) $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$;

d) $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y = \frac{1}{2}$;

e) $y = x^3 - 1$ và tiếp tuyến với $y = x^3 - 1$ tại điểm $(-1 ; -2)$.

3.20. Tính thể tích vật thể :

a) Có đáy là một tam giác cho bởi $y = x$, $y = 0$ và $x = 1$. Mỗi thiết diện vuông góc với trục Ox là một hình vuông.

b) Có đáy là một hình tròn giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 1$. Mỗi thiết diện vuông góc với trục Ox là một hình vuông.

3.21. Tính thể tích các khối tròn xoay khi quay hình phẳng xác định bởi

a) $y = 2 - x^2$, $y = 1$, quanh trục Ox.

b) $y = 2x - x^2$, $y = x$, quanh trục Ox.

c) $y = (2x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x = 0$, $y = 3$, quanh trục Oy.

d) $y = x^2 + 1$, $x = 0$ và tiếp tuyến với $y = x^2 + 1$ tại điểm (1 ; 2), quanh trục Ox.

e) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = \mathrm{e}$, quanh trục Oy.

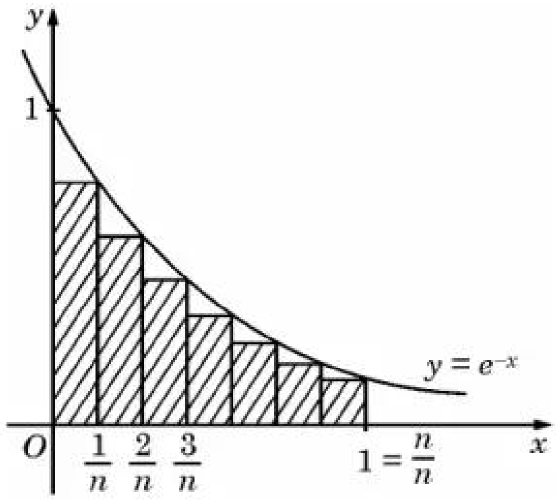
3.22. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = a$ $(a > 1)$.

Gọi thể tích đó là $V(a)$. Xác định thể tích của vật thể khi $a \to +\infty$ (tức là $\lim\limits_{a\to+\infty} V(a)$).

3.23. Một hình phẳng được giới hạn bởi $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Ta chia đoạn [0 ; 1] thành n phần bằng nhau tạo thành một hình bậc thang (bởi n hình chữ nhật con như Hình 72).

a) Tính diện tích S_n của hình bậc thang (tổng diện tích của n hình chữ nhật con).

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ và so sánh với cách tính diện tích hình phẳng này bằng công thức tích phân.



Hình 72

3.24. Trong các cặp hình phẳng giới hạn bởi các đường sau, cặp nào có diện tích bằng nhau ?

a) $\{y = x + \sin x,\ y = x,$ với $0 \le x \le \pi\}$ và $\{y = x + \sin x,\ y = x$ với $\pi \le x \le 2\pi\}$;

b) $\{y = \sin x,\ y = 0$ với $0 \le x \le \pi\}$ và $\{y = \cos x,\ y = 0$ với $0 \le x \le \pi\}$;

c) $\{y = 2x - x^2,\ y = x\}$ và $\{y = 2x - x^2,\ y = 2 - x\}$;

d) $\{y = \log x,\ y = 0,\ x = 10\}$ và $\{y = 10^x,\ x = 0,\ y = 10\}$;

e) $\{y = \sqrt{x},\ y = x^2\}$ và $\{y = \sqrt{1 - x^2},\ y = 1 - x\}$.