§4.

1.21. a) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x-1}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x-1}{x+2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{2}{x}} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Từ $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^+} \dfrac{3-2x}{3x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^-} \dfrac{3-2x}{3x+1} = -\infty$, ta có $x = -\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3-2x}{3x+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\dfrac{3}{x} - 2}{3 + \dfrac{1}{x}} = -\dfrac{2}{3}$ nên đường thẳng $y = -\dfrac{2}{3}$ là tiệm cận ngang.

c) Vì $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} \dfrac{5}{2-3x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^-} \dfrac{5}{2-3x} = +\infty$, nên $x = \dfrac{2}{3}$ là tiệm cận đứng.

Do $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{5}{2-3x} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang.

d) Do $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-4}{x+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{-4}{x+1} = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-4}{x+1} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang.

1.22. a) Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1 - \dfrac{12}{x} + \dfrac{27}{x^2}}{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}} = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang.

b) Vì $\lim\limits_{x \to 1^\pm} \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2} = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Từ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2} = 1$ suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang.

c) Vì $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + 3x}{(x-2)(x+2)} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + 3x}{(x-2)(x+2)} = -\infty$

nên $x = 2$ là một tiệm cận đứng.

Do $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 4} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 + 3x}{(x-2)(x+2)} = -\infty$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng thứ hai.

Ta lại có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1 + \dfrac{3}{x}}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang.

d) Do $\lim\limits_{x \to 1^\pm} \dfrac{2 - x}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x \to 1^\pm} \dfrac{2 - x}{(x-1)(x-3)} = \mp\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Mặt khác, $\lim\limits_{x \to 3^{\pm}} \dfrac{2-x}{x^2-4x+3} = \text{m}\infty$ nên $x = 3$ cũng là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2-x}{x^2-4x+3} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang.

1.23. a) Từ đồ thị (H) (H.1), để có hình (H') nhận $y = 2$ là tiệm cận ngang và $x = 2$ là tiệm cận đứng, ta tịnh tiến đồ thị (H) song song với trục Oy lên trên 3 đơn vị, sau đó tịnh tiến song song với trục Ox về bên phải 3 đơn vị, ta được các hàm số tương ứng sau :

$$y = f(x) = \frac{3-x}{x+1} + 3 = \frac{3-x+3x+3}{x+1} = \frac{2x+6}{x+1} \ ;$$

$$y = g(x) = \frac{2(x-3)+6}{x-3+1} = \frac{2x}{x-2}. \qquad \text{(H')}$$

b) Lấy đối xứng hình (H') qua gốc O, ta được hình (H'') có phương trình là

$$y = h(x) = -\frac{2(-x)}{(-x)-2} = -\frac{-2x}{-2-x} = -\frac{2x}{x+2}.$$