

§4. Hàm số mũ. Hàm số lôgarit

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số mũ

• Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số mũ cơ số a .

• Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi x và $(a^x)' = a^x \ln a$.

Đặc biệt, $(e^x)' = e^x$.

• Các tính chất :

a) Tập xác định của hàm số mũ là \mathbb{R} .

b) Khi $a > 1$ hàm số mũ luôn đồng biến.

Khi $0 < a < 1$ hàm số mũ luôn nghịch biến.

c) Đồ thị của hàm số mũ có tiệm cận ngang là trục Ox và luôn đi qua các điểm $(0 ; 1)$, $(1 ; a)$ và nằm phía trên trục hoành.

2. Hàm số lôgarit

• Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .

• Hàm số lôgarit có đạo hàm tại mọi x dương và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Đặc biệt, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

• Các tính chất :

a) Tập xác định của hàm số lôgarit là $(0 ; +\infty)$.

b) Khi $a > 1$: hàm số lôgarit luôn đồng biến.

Khi $0 < a < 1$: hàm số lôgarit luôn nghịch biến.

c) Đồ thị của hàm số lôgarit có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm $(1 ; 0)$, $(a ; 1)$ và nằm phía bên phải trục tung.

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

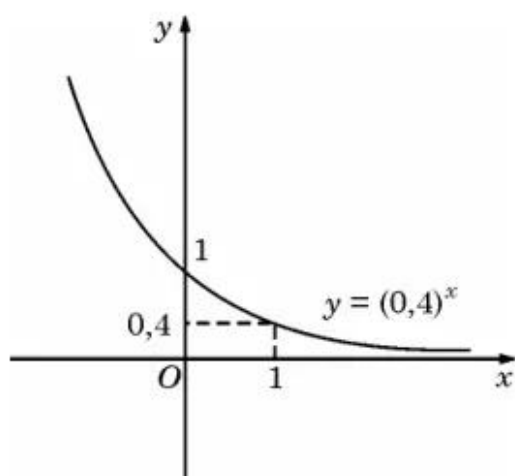
a) $y = (0,4)^x$; b) $y = (2,5)^x$; c) $y = -(0,4)^x$; d) $y = (2,5)^{|x|}$.

Giải

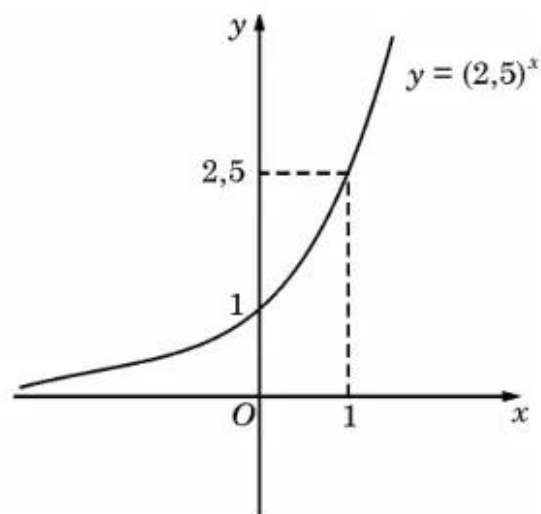
a) Hàm số $y = (0,4)^x$ là hàm số mũ với cơ số nhỏ hơn 1 nên luôn nghịch biến. Đồ thị trên Hình 20.

b) Hàm số $y = (2,5)^x$ là hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến. Đồ thị trên Hình 21.

c) Hàm số $y = -(0,4)^x$ có đồ thị đối xứng với đồ thị của hàm số $y = (0,4)^x$ qua trục hoành (H.22).



Hình 20



Hình 21

d) Ta có

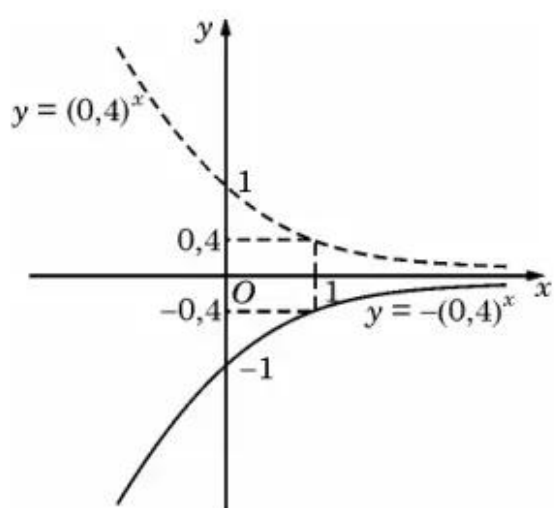
$$y = (2,5)^{|x|} = \begin{cases} (2,5)^x & \text{nếu } x \geq 0 \\ (2,5)^{-x} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Vì $(2,5)^{-x} = \left(\frac{1}{2,5}\right)^x = (0,4)^x$ nên đồ thị của hàm số $y = (2,5)^{|x|}$ gồm :

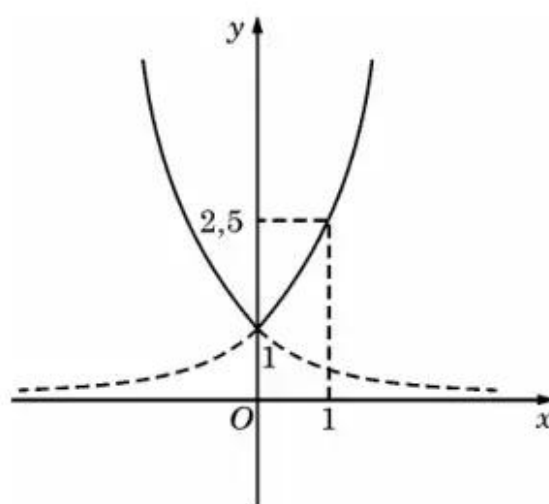
– Phần đồ thị của hàm số $y = (2,5)^x$ ứng với $x \geq 0$.

– Phần đồ thị của hàm số $y = (0,4)^x$ ứng với $x < 0$.

Vậy đồ thị của $y = (2,5)^{|x|}$ có dạng như ở Hình 23.



Hình 22



Hình 23

➤ **Chú ý**

Hàm số $y = (2,5)^{|x|}$ là hàm số chẵn, vì

$$y(-x) = (2,5)^{|-x|} = (2,5)^{|x|} = y(x).$$

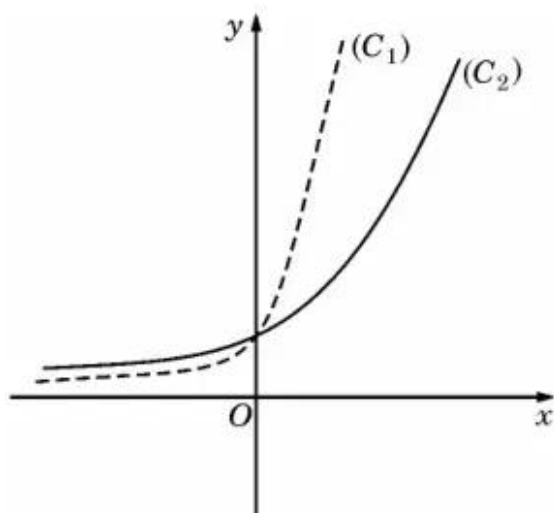
Do đó, đồ thị của hàm số này nhận trục tung là trục đối xứng.

• **Ví dụ 2**

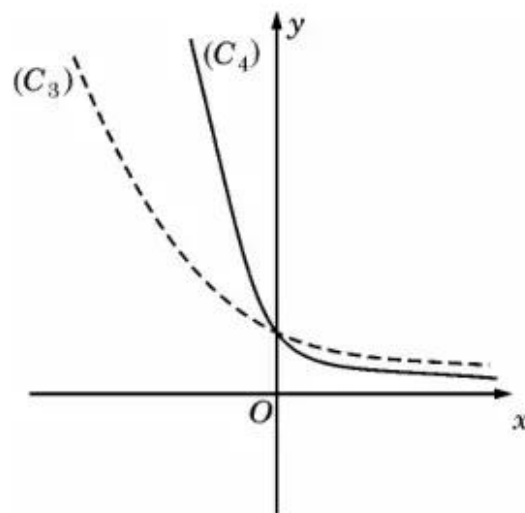
Các hình 24 và 25 là đồ thị của bốn hàm số

$$y = (\sqrt{2})^x, \quad y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x, \quad y = 5^x, \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

Hãy chỉ ra đồ thị tương ứng với mỗi hàm số và giải thích.



Hình 24



Hình 25

Giải

• Ta có (C_1) , (C_2) đi lên từ trái sang phải nên là đồ thị của các hàm số đồng biến $y = (\sqrt{2})^x$, $y = 5^x$. Mặt khác, khi $x > 0$ thì $(\sqrt{2})^x < 5^x$, khi $x < 0$ thì $(\sqrt{2})^x > 5^x$. Vậy (C_1) là đồ thị của hàm số $y = 5^x$, (C_2) là đồ thị của hàm số $y = (\sqrt{2})^x$.

• Ta có (C_3) , (C_4) đi xuống từ trái sang phải nên là đồ thị của các hàm số nghịch biến $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Ngoài ra, khi $x > 0$ thì $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^x$, khi $x < 0$ thì $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Vậy (C_3) là đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$, (C_4) là đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

• **Ví dụ 3**

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^x$ trên đoạn $[-1 ; 2]$.

Giải

Ta có $y = 2^x$ là hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến.

Do đó, giá trị lớn nhất của y trên đoạn $[-1 ; 2]$ là $\max_{[-1 ; 2]} y = y(2) = 2^2 = 4$,

giá trị nhỏ nhất của y trên đoạn $[-1 ; 2]$ là $\min_{[-1 ; 2]} y = y(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

• **Ví dụ 4**

Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_3(x^2 + 2x)$;

b) $y = \log_{0,2}(4 - x^2)$;

c) $y = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3 - x}$;

d) $y = \frac{2}{\log_4 x - 3}$.

Giải

a) Hàm số $y = \log_3(x^2 + 2x)$ xác định khi $x^2 + 2x > 0$ hay $x < -2$ hoặc $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty ; -2) \cup (0 ; +\infty)$.

b) Hàm số $y = \log_{0,2}(4 - x^2)$ xác định khi $4 - x^2 > 0$ hay $-2 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2 ; 2)$.

c) Hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3 - x}$ xác định khi $\frac{1}{3 - x} > 0$ hay $x < 3$. Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty ; 3)$.

d) Hàm số $y = \frac{2}{\log_4 x - 3}$ xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (0 ; 64) \cup (64 ; +\infty)$.

• **Ví dụ 5**

Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \log x$; b) $y = |\log x|$; c) $y = 2 \ln x$; d) $y = \ln x^2$.

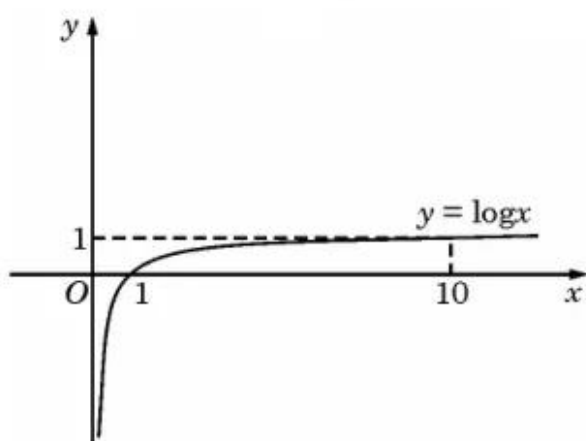
Giải

a) Ta có $y = \log x$ là hàm số lôgarit có cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến. Đồ thị ở Hình 26.

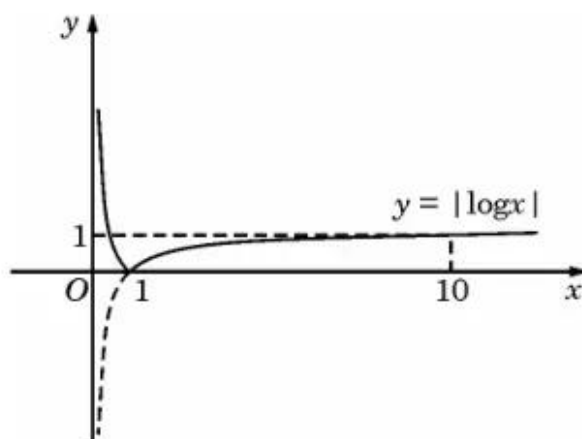
$$b) y = |\log x| = \begin{cases} \log x, & \text{khi } \log x \geq 0 \\ -\log x, & \text{khi } \log x < 0. \end{cases}$$

Do đó, đồ thị của hàm số $y = |\log x|$ gồm :

- Phần đồ thị của hàm số $y = \log x$ ứng với $\log x \geq 0$.
 - Phần đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = \log x$ ứng với $\log x < 0$.
- Vậy đồ thị có dạng như ở Hình 27.



Hình 26



Hình 27

c) Ta có $\ln x$ là hàm số lôgarit với cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến, suy ra hàm số $y = 2\ln x$ cũng luôn đồng biến. Đồ thị ở Hình 28.

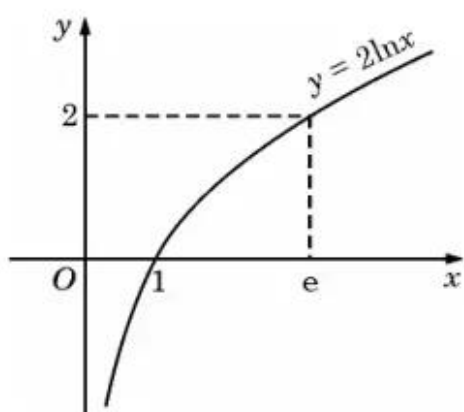
d) Tập xác định của hàm số $y = \ln x^2$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có } y = \ln x^2 = \begin{cases} 2\ln x, & \text{khi } x > 0 \\ 2\ln(-x) & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

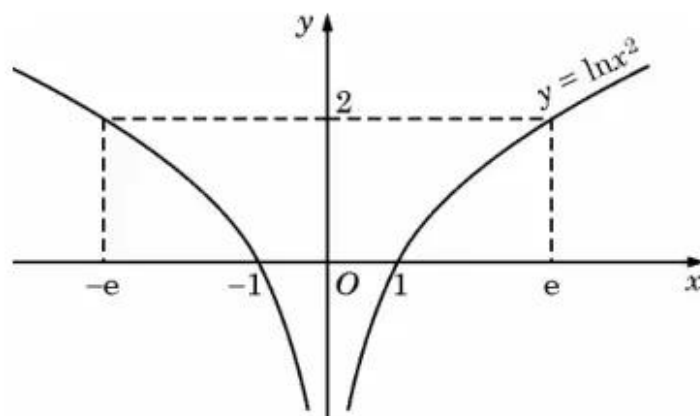
Do đó, đồ thị của hàm số $y = \ln x^2$ gồm :

- Phần đồ thị của hàm số $y = 2\ln x$ ứng với $x > 0$.
- Phần đối xứng qua trục tung của đồ thị đó.

Vậy đồ thị có dạng như ở Hình 29.



Hình 28



Hình 29

• Ví dụ 6

Cho $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2}{2005}\right) + \dots + f\left(\frac{2004}{2005}\right).$$

Giải

Ta có nhận xét : Nếu $a + b = 1$ thì

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^b}{4^b + 2} = \frac{4^a(4^b + 2) + 4^b(4^a + 2)}{(4^a + 2)(4^b + 2)} \\ &= \frac{4^{a+b} + 2 \cdot 4^a + 4^{a+b} + 2 \cdot 4^b}{4^{a+b} + 2 \cdot 4^a + 2 \cdot 4^b + 4} = \frac{2 \cdot 4^a + 2 \cdot 4^b + 8}{2 \cdot 4^a + 2 \cdot 4^b + 8} = 1. \end{aligned}$$

Áp dụng nhận xét đó, ta được

$$\begin{aligned} S &= \left[f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2004}{2005}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2005}\right) + f\left(\frac{2003}{2005}\right) \right] + \dots + \\ &\quad + \left[f\left(\frac{1002}{2005}\right) + f\left(\frac{1003}{2005}\right) \right] = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1002 \text{ số hạng}} = 1002. \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP

2.18. Hãy so sánh mỗi số sau với 1 :

a) $(0,1)^{\sqrt{2}}$;

b) $(3,5)^{0,1}$;

c) $\pi^{-2,7}$;

d) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

2.19. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị của mỗi cặp hàm số sau :

a) $y = 2^x$ và $y = 8$;

b) $y = 3^x$ và $y = \frac{1}{3}$;

c) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ và $y = \frac{1}{16}$;

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và $y = 9$.

2.20. Sử dụng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ, hãy so sánh mỗi cặp số sau :

a) $(1,7)^3$ và 1 ;

b) $(0,3)^2$ và 1 ;

c) $(3,2)^{1,5}$ và $(3,2)^{1,6}$;

d) $(0,2)^{-3}$ và $(0,2)^{-2}$;

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$;

g) 6^π và $6^{3,14}$.

2.21. Từ đồ thị của hàm số $y = 3^x$, hãy vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = 3^x - 2$;

b) $y = 3^x + 2$;

c) $y = |3^x - 2|$;

d) $y = 2 - 3^x$.

2.22. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{|x|}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.

2.23. Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau :

a) 1,5 ngày đêm ?

b) 3,5 ngày đêm ?

2.24. Một khu rừng có trữ lượng gỗ $4 \cdot 10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ ?

2.25. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$;

b) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$;

c) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$;

d) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x + 4}$;

e) $y = \log_\pi(2^x - 2)$;

g) $y = \log_3(3^{x-1} - 9)$.

2.26. Tính đạo hàm của các hàm số cho ở bài tập **2.25**.

2.27. Từ đồ thị của hàm số $y = \log_4 x$, hãy vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = |\log_4 x|$;

b) $y = \log_4 |x|$;

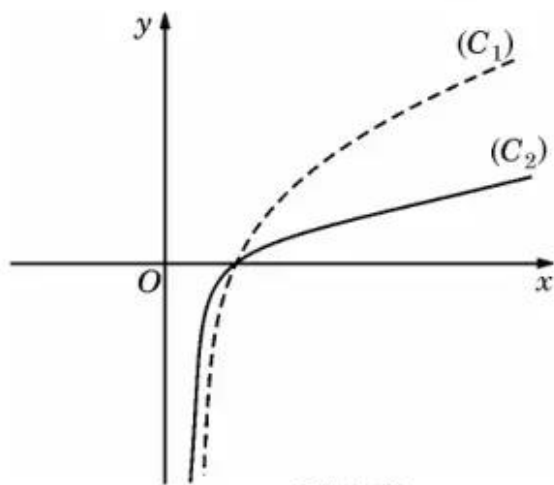
c) $y = \log_4 x + 2$;

d) $y = 1 - \log_4 x$.

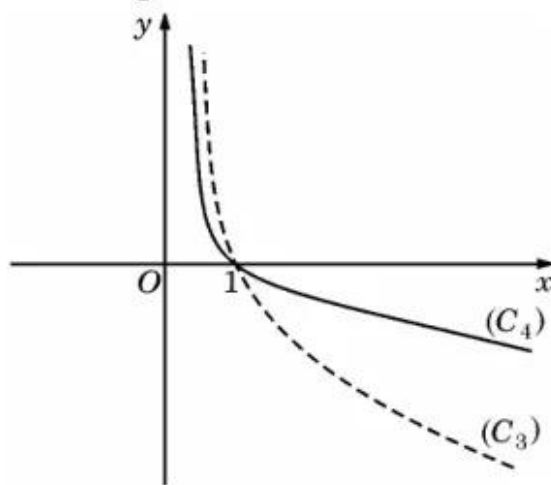
2.28. Các hình 30 và 31 là đồ thị của bốn hàm số

$$y = \log_{\sqrt{2}} x, \quad y = \log_{\frac{1}{e}} x, \quad y = \log_{\sqrt{5}} x, \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Hãy chỉ rõ đồ thị tương ứng với mỗi hàm số và giải thích.



Hình 30



Hình 31

2.29. Hãy so sánh x với 1, biết rằng :

a) $\log_3 x = -0,3$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1,7$;

c) $\log_2 x = 1,3$;

d) $\log_{\frac{1}{4}} x = -1,1$.