§4. Phương trình bậc hai với hệ số thực

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

• Các căn bậc hai của số thực $a < 0$ là $\pm i\sqrt{|a|}$.

• Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm kép (thực) $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Giải phương trình $x^2 + x + 7 = 0$.

Giải

Ta có $\Delta = 1 - 4.7 = -27$. Phương trình có hai nghiệm phức

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{27}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\,; \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{27}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

• ***Ví dụ 2***

Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a,b,c \in$ ¡ $;a \neq 0$. Chứng minh rằng $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1.z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Giải

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$. Xét các trường hợp của Δ :

Trường hợp $\Delta = 0$ hay $b^2 = 4ac$, ta có $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ nên

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{2a} + \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$z_1 . z_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Trường hợp $\Delta > 0$, ta có $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

nên $$z_1 + z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$z_1.z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Trường hợp $\Delta < 0$, ta có $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

nên $$z_1 + z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} + \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$z_1.z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \cdot \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{b^2 - i^2|\Delta|}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 + |\Delta|}{4a^2} = \frac{b^2 + (4ac - b^2)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

C. BÀI TẬP

4.22. Chứng minh rằng số thực $a < 0$ chỉ có hai căn bậc hai phức là $\pm i\sqrt{|a|}$.

4.23. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $2x^2 + 3x + 4 = 0$; b) $3x^2 + 2x + 7 = 0$; c) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$.

4.24. Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + \sqrt{3}x + 3 = 0$. Hãy tính :

a) $z_1^2 + z_2^2$; b) $z_1^3 + z_2^3$; c) $z_1^4 + z_2^4$; d) $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$.

4.25. Chứng minh rằng hai số phức liên hợp z và $\overline{z}$ là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số thực.

4.26. Lập phương trình bậc hai có nghiệm là :

a) $1 + i\sqrt{2}$ và $1 - i\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3} + 2i$ và $\sqrt{3} - 2i$;

c) $-\sqrt{3} + i\sqrt{2}$ và $-\sqrt{3} - i\sqrt{2}$.

4.27. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $x^3 - 8 = 0$; b) $x^3 + 8 = 0$.