§5.

1.24. Học sinh tự giải.

1.25. Học sinh tự giải.

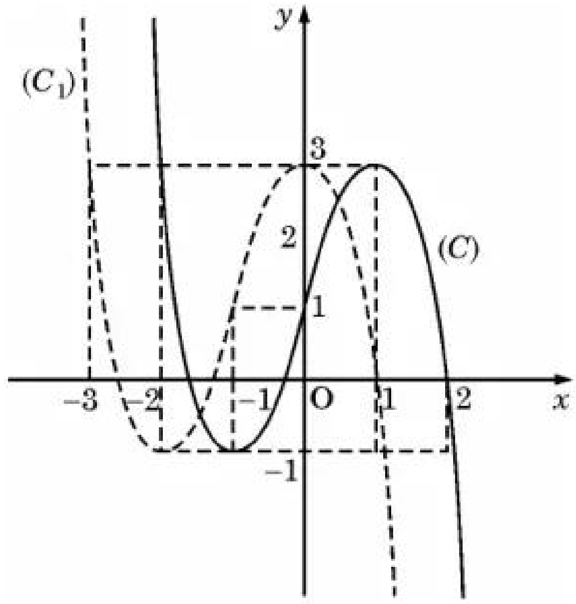
1.26. a) Hình 4.

b) Tịnh tiến (C) song song với trục Ox sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị (C_1) của hàm số

$$y = f(x) = -(x+1)^3 + 3(x+1) + 1$$

hay $f(x) = -(x+1)^3 + 3x + 4$. (C_1)

Lấy đối xứng (C_1) qua trục Ox, ta được đồ thị (C') của hàm số $y = g(x) = (x+1)^3 - 3x - 4$ (H.5).



Hình 4

c) Ta có $(x+1)^3 = 3x + m$ (1)

$\Leftrightarrow (x+1)^3 - 3x - 4 = m - 4.$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của hai đường

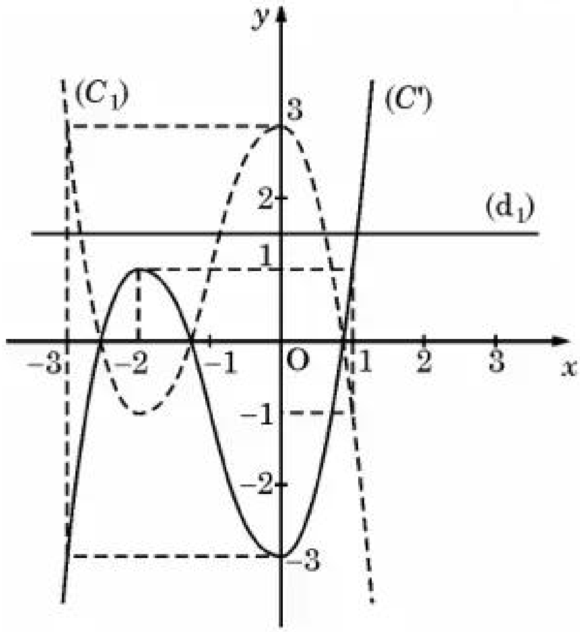
$$y = g(x) = (x+1)^3 - 3x - 4 \qquad (C')$$

và $y = m - 4.$ (d_1)

Từ đồ thị, ta suy ra :

- $m > 5$ hoặc $m < 1$: phương trình (1) có một nghiệm.
- $m = 5$ hoặc $m = 1$: phương trình (1) có hai nghiệm.
- $1 < m < 5$, phương trình (1) có ba nghiệm.

d) Vì (d) vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{x}{9} + 1$ nên có hệ số góc bằng 9.



Hình 5

Ta có $\qquad g'(x) = 3(x+1)^2 - 3,$

$$g'(x) = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến phải tìm là :

$$y - 1 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 8\ ;$$

$$y + 3 = 9(x + 3) \Leftrightarrow y = 9x + 24.$$

1.27. Xét hàm số $y = \dfrac{4 - x}{2x + 3m}.$

a) TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3m}{2}\right\}.$

$$y' = \frac{-2x - 3m - 2(4 - x)}{(2x + 3m)^2} = \frac{-3m - 8}{(2x + 3m)^2}.$$

- Nếu $m < -\dfrac{8}{3}$, $y' > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty\ ; -\dfrac{3m}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{3m}{2}\ ; +\infty\right)$.

• Nếu $m > -\frac{8}{3}$, $y' < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty ; -\frac{3m}{2}\right)$, $\left(-\frac{3m}{2} ; +\infty\right)$.

• Nếu $m = -\frac{8}{3}$ thì $y = -\frac{1}{2}$ khi $x \neq 4$.

b) Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4 - x}{2x + 3m} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{4}{x} - 1}{2 + \frac{3m}{x}} = -\frac{1}{2}$

nên với mọi m, đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang và đi qua $B\left(-\frac{7}{4} ; -\frac{1}{2}\right)$.

c) Số giao điểm của (C_m) và đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là số nghiệm của phương trình $\frac{4 - x}{2x + 3m} = x$.

Ta có $\frac{4 - x}{2x + 3m} = x \Leftrightarrow 4 - x = 2x^2 + 3mx$ với $x \neq -\frac{3m}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (3m + 1)x - 4 = 0, \qquad (*)$$

với $\quad x \neq -\frac{3m}{2}$.

• Thay $x = -\frac{3m}{2}$ vào (*), ta có :

$$2.\left(-\frac{3m}{2}\right)^2 - \frac{9m^2}{2} - \frac{3m}{2} - 4 = \frac{9m^2}{2} - \frac{9m^2}{2} - \frac{3m}{2} - 4 \neq 0.$$

$\Rightarrow \qquad m \neq -\frac{8}{3}$.

Như vậy, để $x = -\frac{3m}{2}$ không là nghiệm của phương trình (*), ta phải có $m \neq -\frac{8}{3}$.

Ta có $\Delta = (3m + 1)^2 + 32 > 0$, $\forall m$. Từ đó suy ra với $m \neq -\frac{8}{3}$ đường thẳng $y = x$ luôn cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt.

d) Ta có $y = \left|\dfrac{4-x}{2x+3}\right| = \begin{cases} \dfrac{4-x}{2x+3} & \text{với } \dfrac{4-x}{2x+3} \geq 0 \\ -\dfrac{4-x}{2x+3} & \text{với } \dfrac{4-x}{2x+3} < 0. \end{cases}$

Trước hết, ta vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{4-x}{2x+3}$. TXĐ : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Vì $y' = \dfrac{-11}{(2x+3)^2} < 0$ với mọi $x \neq -\dfrac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{3}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{3}{2} ; +\infty\right)$.

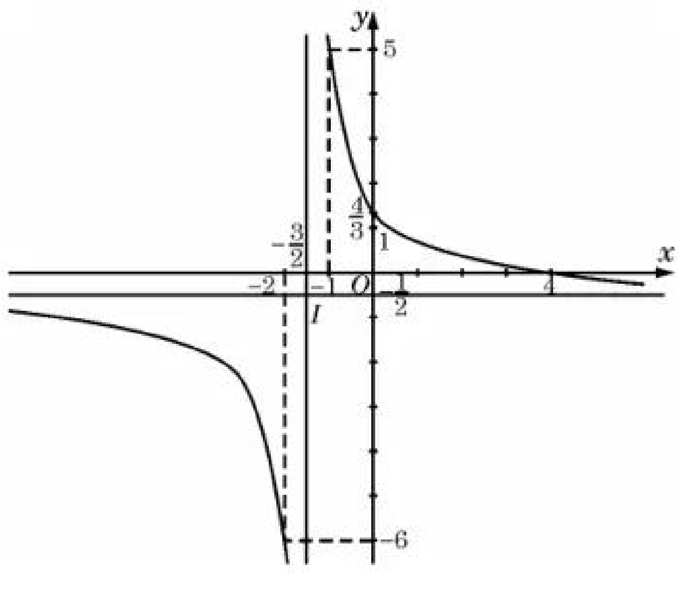
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$			$+\infty$
y'		$-$	‖		$-$	
y	$-\dfrac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘	$-\dfrac{1}{2}$

Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{3}{2}$.

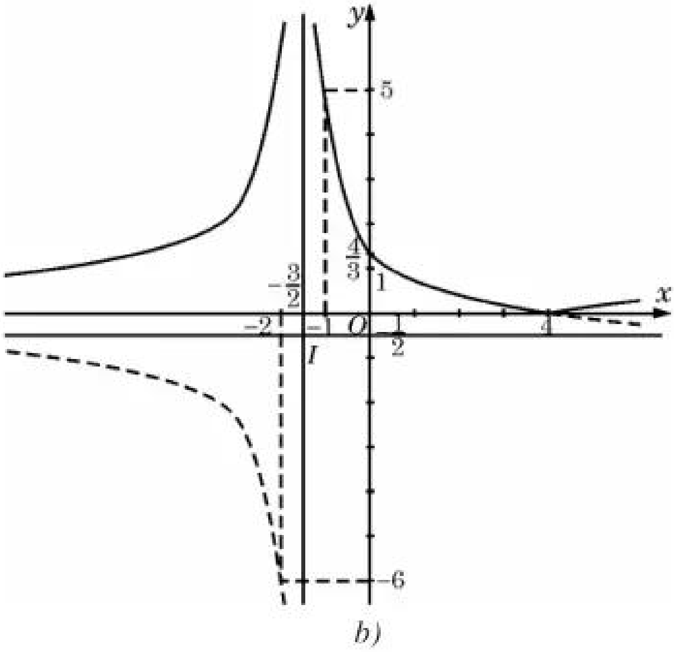
Tiệm cận ngang $y = -\dfrac{1}{2}$.

Đồ thị (C) đi qua các điểm $(-2 ; -6)$, $(-1 ; 5)$, $\left(0 ; \dfrac{4}{3}\right)$, $(4 ; 0)$ (H. 6a).



a)

Để vẽ đồ thị (C') của hàm số $y = \left|\frac{4-x}{2x+3}\right|$, ta giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành (H.6b).



b)

Hình 6

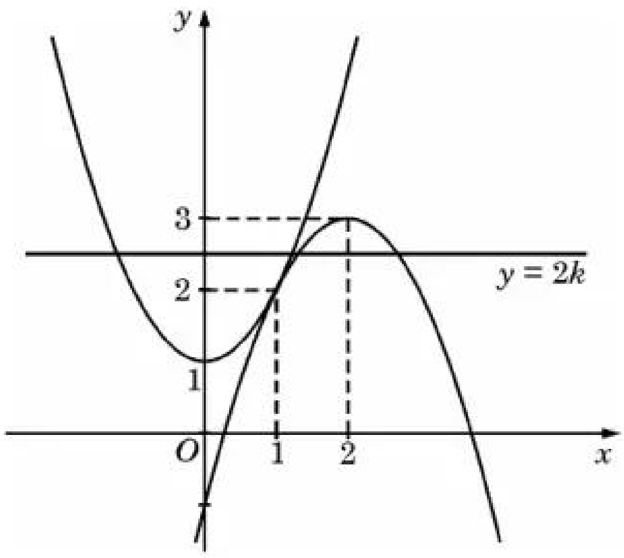
1.28. a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình $2(x-k) = \pm(x-1)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+4x-1=2k \\ x^2+1=2k. \end{array}\right.$$

Ta vẽ đồ thị của hai hàm số

$y = -x^2 + 4x - 1$

và $y = x^2 + 1$ (H.7).



Hình 7

Từ đồ thị ta suy ra :

$2k > 3$: phương trình có hai nghiệm ;

$2k = 3$: phương trình có ba nghiệm ;

$2 < 2k < 3$: phương trình có bốn nghiệm ;

$2k = 2$: phương trình có ba nghiệm ;

$1 < 2k < 2$: phương trình có bốn nghiệm ;

$2k = 1$: phương trình có ba nghiệm ;

$2k < 1$: phương trình có hai nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < k < \dfrac{3}{2} \text{ hoặc } \dfrac{1}{2} < k < 1, & \text{phương trình có bốn nghiệm ;} \\ k = 1 \text{ hoặc } k = \dfrac{1}{2}, \text{ hoặc } k = \dfrac{3}{2} & \text{phương trình có ba nghiệm ;} \\ k > \dfrac{3}{2} \text{ hoặc } k < \dfrac{1}{2} & \text{phương trình có hai nghiệm.} \end{cases}$$

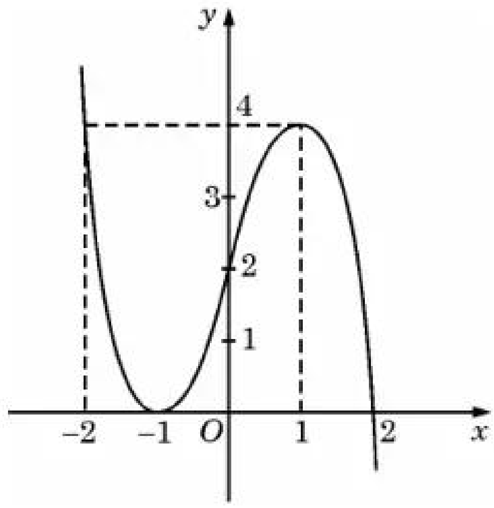
b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = (x+1)^2(2-x)$.

$$y = -x^3 + 3x + 2 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3 \text{ ;}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$



Hình 8

Đồ thị như trên Hình 8.

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra :

- $k > 4$ hoặc $k < 0$: phương trình có một nghiệm ;
- $k = 4$ hoặc $k = 0$: phương trình có hai nghiệm ;
- $0 < k < 4$: phương trình có ba nghiệm.

1.29. a) $y = x^3 - (m+4)x^2 - 4x + m$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)m + y - x^3 + 4x^2 + 4x = 0.$

Đồ thị của hàm số (1) luôn luôn đi qua điểm $A(x\,;y)$ với mọi m khi $(x\,;y)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y - x^3 + 4x^2 + 4x = 0. \end{cases}$$

Giải hệ, ta được hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 1, \quad y = -7 \\ x = -1, \; y = -1. \end{array}\right.$

Vậy đồ thị của hàm số luôn luôn đi qua hai điểm $(1 ; -7)$ và $(-1 ; -1)$.

b) $y' = 3x^2 - 2(m+4)x - 4$;

$\Delta' = (m+4)^2 + 12$;

Vì $\Delta' > 0$ với mọi m nên $y' = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt (và đổi dấu khi qua hai nghiệm đó). Từ đó suy ra đồ thị của (1) luôn luôn có cực trị.

c) Học sinh tự giải.

d) Với $m = 0$ ta có $y = x^3 - 4x^2 - 4x$.

Đường thẳng $y = kx$ sẽ cắt (C) tại ba điểm phân biệt nếu phương trình sau có ba nghiệm phân biệt

$$x^3 - 4x^2 - 4x = kx$$

hay phương trình $x^2 - 4x - (4 + k) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là

$$\begin{cases} \Delta' = k + 8 > 0 \\ k \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8 < k < -4 \\ -4 < k < +\infty. \end{array}\right.$$

1.30. a) Học sinh tự giải.

b) $\dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - \dfrac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

(C) cắt trục Ox tại $x = -3$ và $x = 3$.

Ta có $y' = x^3 - 4x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 3$ và $x = -3$ lần lượt là

$$y = y'(3)(x - 3) \quad \text{và} \quad y = y'(-3)(x + 3)$$

hay $\quad y = 15(x - 3) \quad$ và $\quad y = -15(x + 3)$.

c) $\frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4} = k - 2x^2 \Leftrightarrow x^4 = 9 + 4k.$

Từ đó, ta có

$k = -\frac{9}{4}$: (C) và (P) có một điểm chung là $\left(0\, ; -\frac{9}{4}\right)$.

$k > -\frac{9}{4}$: (C) và (P) có hai giao điểm.

$k < -\frac{9}{4}$: (C) và (P) không cắt nhau.

1.31. a) $y = x^4 + mx^2 - m - 5$;

$y' = 4x^3 + 2mx = 2x\left(2x^2 + m\right).$

(C_m) có ba điểm cực trị khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, tức là

$2x(2x^2 + m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m < 0$.

b) Đường (C_{-2}) có phương trình là $y = x^4 - 2x^2 - 3$;

$y' = 4x^3 - 4x.$

Tiếp tuyến của (C_{-2}) song song với đường thẳng $y = 24x - 1$ và đi qua điểm trên đồ thị có hoành độ thoả mãn $4x^3 - 4x = 24$

$\Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\left(x^2 + 2x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy phương trình của tiếp tuyến phải tìm là $y - y(2) = 24(x - 2)$

$\Leftrightarrow y = 24x - 43.$