

## §5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I – SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ $y = f(x)$

1. **Tìm tập xác định** của hàm số.

2. **Sự biến thiên**

a) Chiều biến thiên

- Tính  $y'$ .
- Tìm các nghiệm của phương trình  $y' = 0$  và các điểm tại đó  $y'$  không xác định.
- Xét dấu  $y'$  và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

b) Tìm cực trị.

c) Tìm các giới hạn vô cực ; các giới hạn tại  $+\infty$ ,  $-\infty$  và tại các điểm mà hàm số không xác định. Tìm các tiệm cận đứng và ngang (nếu có).

d) Lập bảng biến thiên.

3. **Đồ thị**

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.



**Chú ý**

1) Nếu hàm số là tuần hoàn với chu kì  $T$  thì chỉ cần vẽ đồ thị trên một chu kì rồi tịnh tiến đồ thị song song với  $Ox$ .

2) Để vẽ đồ thị thêm chính xác, ta cần :

- Tính thêm tọa độ một số điểm, đặc biệt nên tính tọa độ các giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ.
- Lưu ý tính chất đối xứng (qua trục, qua tâm, ...) của đồ thị.

## II – KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM SỐ ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC

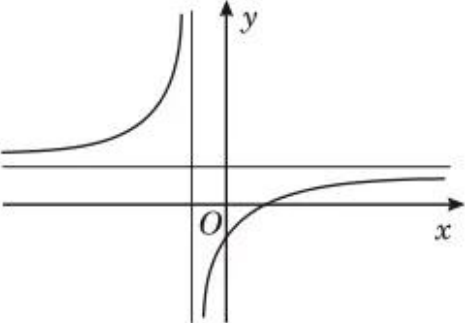
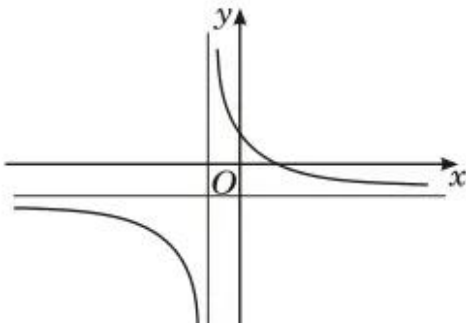
**Dạng của đồ thị hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ )**

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

**Dạng của đồ thị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ )**

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có một nghiệm		

Dạng của đồ thị hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  ( $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ )

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

### III – SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

#### 1. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

Giả sử  $(C_1)$  là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  và  $(C_2)$  là đồ thị của hàm số  $y = g(x)$ . Số nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  bằng số giao điểm của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

#### 2. Viết phương trình tiếp tuyến

Giả sử hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là  $(C)$  và  $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$ ;  $f(x)$  có đạo hàm tại  $x = x_0$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M_0$  là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

## B. VÍ DỤ

### • Ví dụ 1

a) Viết phương trình parabol dạng  $y = ax^2 + bx + c$  đi qua các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị (C) của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  và tiếp xúc với đường thẳng  $y = -2x + 2$ . (d)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng

$$y = -\frac{5}{3}x - 1. \quad (d')$$

### Giải

a)  $y = x^3 - 3x^2 + 4$ ;

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Các điểm cực trị của (C) là  $M_1(0; 4)$  và  $M_2(2; 0)$ .

Parabol (P) đi qua  $M_1$  và  $M_2$  có dạng

$$y = ax^2 - 2(1 + a)x + 4 \quad (a \neq 0).$$

Điều kiện để parabol (P) tiếp xúc với (d) là hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} ax^2 - 2(1 + a)x + 4 = -2x + 2 \\ 2ax - 2(1 + a) = -2 \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

Giải hệ trên, ta được  $a = 2, x = 1$ .

Parabol (P) phải tìm có phương trình là  $y = 2x^2 - 6x + 4$ .

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với (d') là  $y = -\frac{5}{3}(x - x_0) + y_0$ .

Giải phương trình  $3x^2 - 6x = -\frac{5}{3}$ , ta được  $x = \frac{5}{3}$  và  $x = \frac{1}{3}$ . Từ đó hai phương

trình tiếp tuyến phải tìm là  $y = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{5}{3}\right) + \frac{8}{27}$  và  $y = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{100}{27}$ .

• **Ví dụ 2**

Biện luận theo  $m$  số nghiệm của phương trình

$$\frac{2x^2 - 2x - 3}{x - 3} = x + m.$$

**Giải**

Ta có

$$\frac{2x^2 - 2x - 3}{x - 3} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (1 - m)x - 3(1 - m) = 0 \quad (x \neq 3). \quad (*)$$

Ta có  $9 + 3(1 - m) - 3(1 - m) \neq 0$  nên  $x \neq 3$ ,

$$\Delta = (1 - m)^2 + 12(1 - m) = (m - 1)(m - 13).$$

Từ đó ta có

$m > 13$  hoặc  $m < 1 \Rightarrow \Delta > 0$  nên phương trình đã cho có hai nghiệm.

$m = 1$  hoặc  $m = 13 \Rightarrow \Delta = 0$  nên phương trình đã cho có một nghiệm.

$1 < m < 13 \Rightarrow \Delta < 0$  nên phương trình đã cho vô nghiệm.

**C. BÀI TẬP**

**1.24.** Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

a)  $y = x^2 - 4x + 3$ ;

b)  $y = 2 - 3x - x^2$ ;

c)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$ ;

d)  $y = x^3 - x^2 + x$ ;

e)  $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1$ .

**1.25.** Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

a)  $y = \frac{x - 2}{x + 1}$ ;

b)  $y = \frac{2x - 1}{3x + 2}$ ;

c)  $y = \frac{2 - x}{2x - 1}$ .

**1.26. a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = -x^3 + 3x + 1.$$

b) Chỉ ra phép biến hình biến  $(C)$  thành đồ thị  $(C')$  của hàm số

$$y = (x + 1)^3 - 3x - 4.$$

c) Dựa vào đồ thị  $(C')$ , biện luận theo  $m$  số nghiệm của phương trình

$$(x + 1)^3 = 3x + m.$$

d) Viết phương trình tiếp tuyến  $(d)$  của đồ thị  $(C')$ , biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{x}{9} + 1$ .

**1.27.** Cho hàm số

$$y = \frac{4 - x}{2x + 3m}.$$

a) Xét tính đơn điệu của hàm số.

b) Chứng minh rằng với mọi  $m$ , tiệm cận ngang của đồ thị  $(C_m)$  của hàm số đã cho luôn đi qua điểm  $B\left(-\frac{7}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ .

c) Biện luận theo  $m$  số giao điểm của  $(C_m)$  và đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

d) Vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \left| \frac{4 - x}{2x + 3} \right|.$$

**1.28.** Biện luận theo  $k$  số nghiệm của phương trình :

$$\text{a) } (x - 1)^2 = 2|x - k|;$$

$$\text{b) } (x + 1)^2(2 - x) = k.$$

**1.29.** Cho hàm số

$$y = x^3 - (m + 4)x^2 - 4x + m. \quad (1)$$

a) Tìm các điểm mà đồ thị của hàm số (1) đi qua với mọi giá trị của  $m$ .

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $m$ , đồ thị của hàm số (1) luôn luôn có cực trị.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị  $(C)$  của (1) khi  $m = 0$ .

d) Xác định  $k$  để  $(C)$  cắt đường thẳng  $y = kx$  tại ba điểm phân biệt.

**1.30.** Cho hàm số

$$y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}.$$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ( $C$ ) của hàm số đã cho.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của ( $C$ ) tại các giao điểm của nó với trục  $Ox$ .
- c) Biện luận theo  $k$  số giao điểm của ( $C$ ) với đồ thị ( $P$ ) của hàm số

$$y = k - 2x^2.$$

**1.31.** Cho hàm số

$$y = x^4 + mx^2 - m - 5.$$

- a) Xác định  $m$  để đồ thị ( $C_m$ ) của hàm số đã cho có ba điểm cực trị.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của ( $C_{-2}$ ) (ứng với  $m = -2$ ) song song với đường thẳng  $y = 24x - 1$ .