§5

2.30. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3}=\left(\frac{4}{3}\right)^{5-x}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-5}\Leftrightarrow 2x-3=x-5\Leftrightarrow x=-2$;

b) $5^{x^2-5x-6}=5^0\Leftrightarrow x^2-5x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=6\end{array}\right.$;

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=\left(\frac{1}{7}\right)^{-x-1}\Leftrightarrow x^2-2x-3=-x-1\Leftrightarrow x^2-x-2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2.\end{array}\right.$$

d) $2^{5.\frac{x+5}{x-7}} = 2^{-2}.5^{3.\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5x+25}{x-7}+2} = 5^{\frac{3x+51}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{7x+11}{x-7}} = 5^{\frac{3x+51}{x-3}}$.

Lấy lôgarit cơ số 2 cả hai vế, ta được

$$\frac{7x+11}{x-7} = \frac{3x+51}{x-3}\log_2 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 10x - 33 = \left(3x^2 + 30x - 357\right)\log_2 5 \\ x \neq 7,\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (7 - 3\log_2 5)x^2 - 2(5 + 15\log_2 5)x - (33 - 357\log_2 5) = 0.$$

Ta có $\Delta' = (5 + 15\log_2 5)^2 + (7 - 3\log_2 5)(33 - 357\log_2 5)$

$$= 1296\log_2^2 5 - 2448\log_2 5 + 256 > 0\,.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{5 + 15\log_2 5 \pm \sqrt{\Delta'}}{7 - 3\log_2 5},$$

đều thoả mãn điều kiện $x \neq 7$ và $x \neq 3$.

2.31. a) $16.2^x + 4.2^x = 5.5^x + 3.5^x \Leftrightarrow 20.2^x = 8.5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \Leftrightarrow x = 1$;

b) $16.7^x - 16.5^{2x} = 0 \Leftrightarrow 7^x = 5^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^x = \left(\frac{7}{25}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$;

c) Chia hai vế cho $12^x\ (12^x > 0)$, ta được

$$4\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 - 3\left(\frac{4}{3}\right)^x = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ (t > 0), ta có phương trình $4t + 1 - \frac{3}{t} = 0$ hay $4t^2 + t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Do đó $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^1$. Vậy $x = 1$.

d) Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình

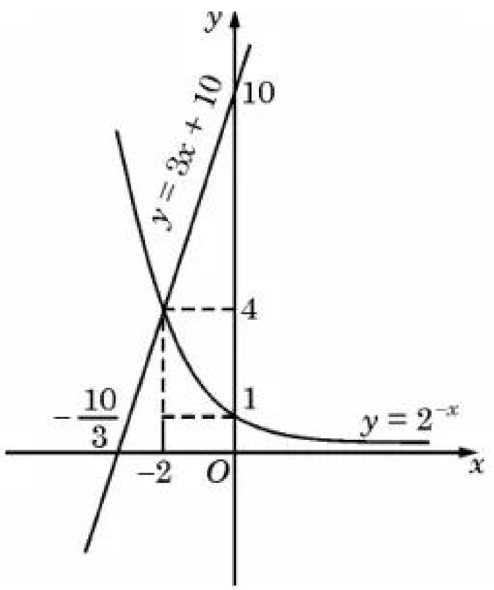
$$-t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2-t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2. \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2. \end{array}\right.$

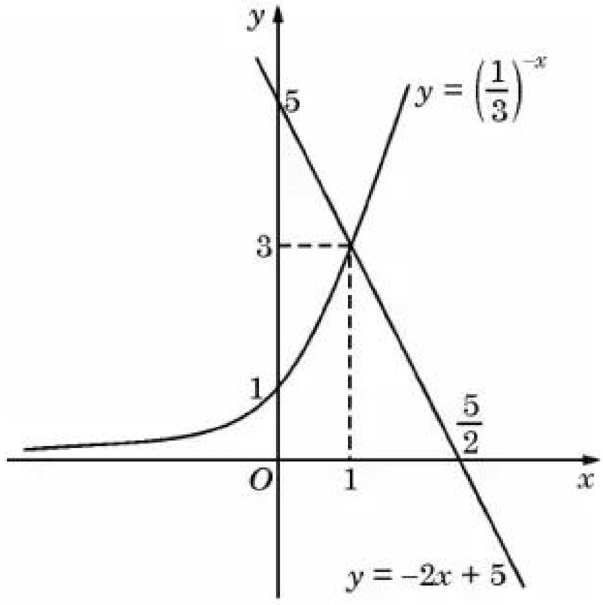
Vậy $x = 0$ và $x = 1$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

2.32. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2^{-x}$ và đường thẳng $y = 3x + 10$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.49) ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = -2$. Thử lại, ta thấy $x = -2$ thoả mãn phương trình đã cho.

Mặt khác, hàm số $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ luôn nghịch biến, hàm số $y = 3x + 10$ luôn đồng biến. Vậy $x = -2$ là nghiệm duy nhất.



Hình 49



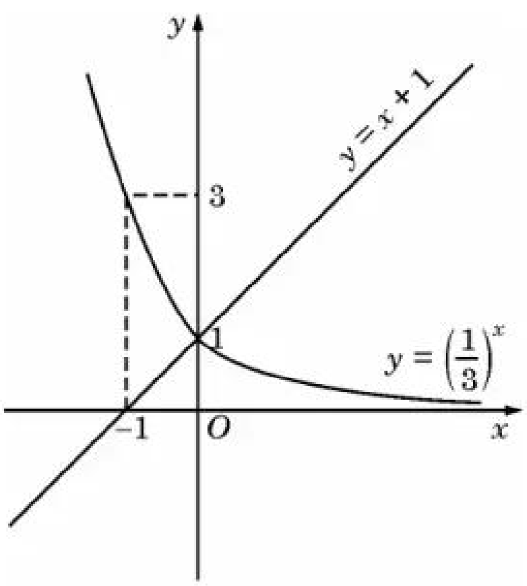
Hình 50

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ và đường thẳng $y = -2x + 5$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.50), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$. Thử lại, ta thấy $x = 1$ thoả mãn phương trình đã cho.

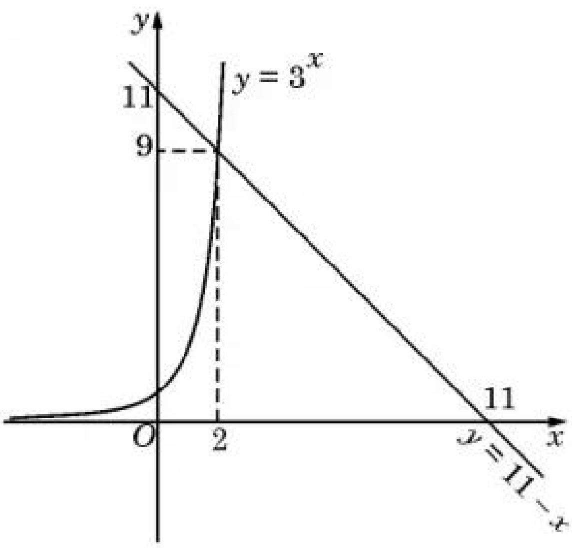
Mặt khác, hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x$ luôn đồng biến, hàm số $y = -2x + 5$ luôn nghịch biến.

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ và đường thẳng $y = x + 1$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.51), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 0$. Thử lại, ta thấy $x = 0$ thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ là hàm số luôn nghịch biến, hàm số $y = x + 1$ luôn đồng biến. Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất.



Hình 51



Hình 52

d) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3^x$ và đường thẳng $y = 11 - x$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.52), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 2$. Thử lại, ta thấy $x = 2$ thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, $y = 3^x$ luôn đồng biến, $y = 11 - x$ luôn nghịch biến. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

2.33. a) Với điều kiện $x > 0$, ta có $\log x + 2\log x = \log 9 + \log x \Leftrightarrow \log x = \log 3$ $\Leftrightarrow x = 3$.

b) Với điều kiện $x > 0$, ta có $4\log x + \log 4 + \log x = 2\log 10 + 3\log x$

$\Leftrightarrow \log x = \log 5 \Leftrightarrow x = 5$.

c) Ta có điều kiện của phương trình đã cho là

$$\begin{cases}(x+2)(x+3)>0\\ \dfrac{x-2}{x+3}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-3 \quad \text{hoặc } x>-2\\ x<-3 \quad \text{hoặc } x>2\end{cases} \Leftrightarrow x<-3 \text{ hoặc } x>2. \quad (1)$$

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_4\left[(x+2)(x+3)\frac{x-2}{x+3}\right]=\log_4 16 \Leftrightarrow x^2-4=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{5}\\ x=-2\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Cả hai nghiệm trên đều thoả mãn điều kiện (1).

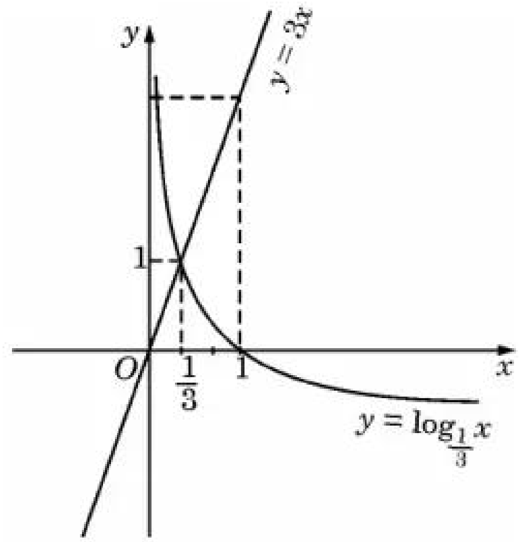
d) Với điều kiện $x>2$, ta có phương trình $2\log_3(x-2)(\log_5 x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(x-2)=0\\ \log_5 x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5.\end{array}\right.$$

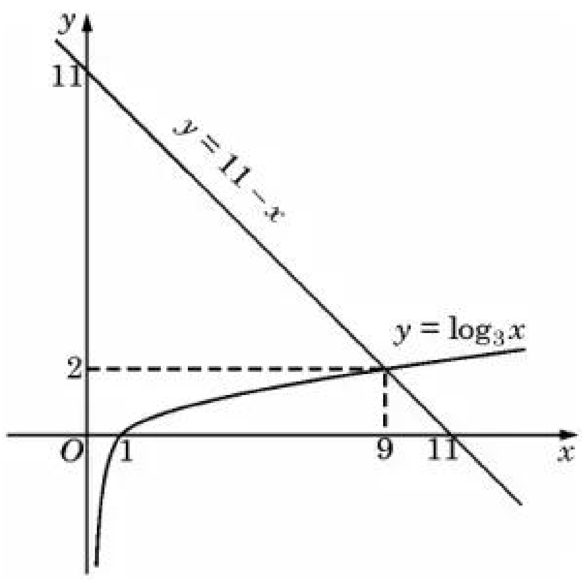
Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện $x>2$.

2.34. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ và đường thẳng $y=3x$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.53), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{1}{3}$.

Thử lại, ta thấy giá trị này thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ luôn nghịch biến, hàm số $y=3x$ luôn đồng biến. Vậy $x=\dfrac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.



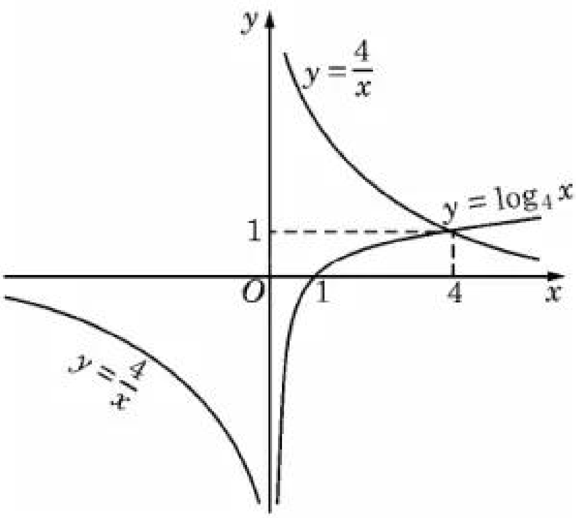
Hình 53



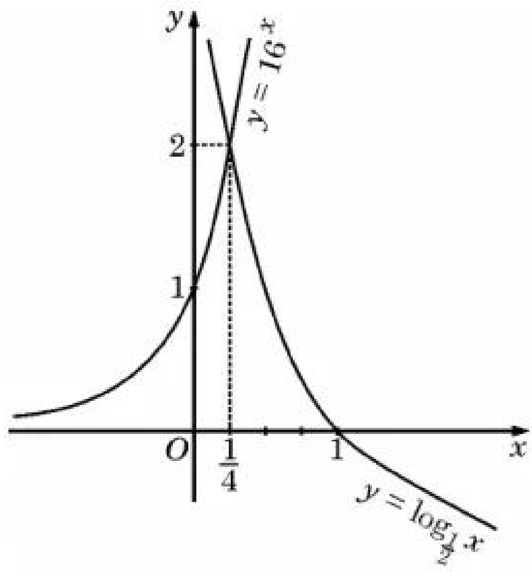
Hình 54

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ và đường thẳng $y = -x + 11$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.54), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 9$. Lập luận tương tự câu a), ta cũng có đây là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

c) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \log_4 x$ và $y = \dfrac{4}{x}$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.55), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 4$. Ta cũng có hàm số $y = \log_4 x$ luôn đồng biến, hàm số $y = \dfrac{4}{x}$ luôn nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$. Do đó, $x = 4$ là nghiệm duy nhất.



Hình 55



Hình 56

d) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 16^x$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.56), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{1}{4}$. Thử lại, ta thấy $x = \dfrac{1}{4}$ thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, hàm số $y = 16^x$ luôn đồng biến, hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ luôn nghịch biến.

Vậy $x = \dfrac{1}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2.35. a) $\log_2(2^x+1).\log_2[2(2^x+1)] = 2 \Leftrightarrow \log_2(2^x+1).\left[1+\log_2(2^x+1)\right] = 2$.

Đặt $t = \log_2(2^x+1)$, ta có phương trình $t(1+t) = 2 \Leftrightarrow t^2+t-2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2^x+1) = 1 \\ \log_2(2^x+1) = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x+1 = 2 \\ 2^x+1 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = -\dfrac{3}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

b) Với điều kiện $x > 0$, ta có

$$\log(x^{\log 9}) = \log 9.\log x \text{ và } \log(9^{\log x}) = \log x.\log 9$$

nên $$\log(x^{\log 9}) = \log(9^{\log x}).$$

Suy ra $x^{\log 9} = 9^{\log x}$.

Đặt $t = x^{\log 9}$, ta được phương trình $2t = 6 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x^{\log 9} = 3$

$\Leftrightarrow \log(x^{\log 9}) = \log 3 \Leftrightarrow \log 9.\log x = \log 3$

$\Leftrightarrow \log x = \dfrac{\log 3}{\log 9} \Leftrightarrow \log x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{10}$ (thoả mãn điều kiện $x > 0$).

c) Với điều kiện $x > 0$, lấy lôgarit thập phân hai vế của phương trình đã cho, ta được

$$\left(3\log^3 x - \frac{2}{3}\log x\right).\log x = \frac{7}{3}.$$

Đặt $t = \log x$, ta được phương trình $3t^4 - \dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{7}{3} = 0$

$$\Leftrightarrow 9t^4 - 2t^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 1 \\ t^2 = -\dfrac{7}{9} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = 1 \\ \log x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = \dfrac{1}{10}. \end{array}\right.$$

d) Đặt $t = \log_5(x+2)$ với điều kiện $x + 2 > 0, x + 2 \neq 1$, ta có

$$1 + \frac{2}{t} = t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0,\ t \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5(x+2) = -1 \\ \log_5(x+2) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = \dfrac{1}{5} \\ x + 2 = 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{9}{5} \\ x = 23. \end{array}\right.$$