# §5. Phương trình mũ và phương trình lôgarit

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### I – PHƯƠNG TRÌNH MŨ

#### 1. Phương trình mũ cơ bản

$$a^x = b \ (a > 0, a \neq 1).$$

Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $b > 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

#### 2. Phương trình mũ đơn giản

a) Phương trình có thể đưa về phương trình mũ cơ bản bằng cách áp dụng các phương pháp :

- Đưa về cùng một cơ số ;
- Đặt ẩn phụ ;
- Lấy lôgarit hai vế (lôgarit hoá).

b) Phương trình có thể giải bằng phương pháp đồ thị.

c) Phương trình có thể giải bằng cách áp dụng tính chất của hàm số mũ.

## II – PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

### 1. Phương trình lôgarit cơ bản

$$\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1).$$

Phương trình lôgarit cơ bản luôn có nghiệm duy nhất

$$x = a^b.$$

### 2. Phương trình lôgarit đơn giản

a) Phương trình có thể đưa về phương trình lôgarit cơ bản bằng cách áp dụng các phương pháp :

- Đưa về cùng một cơ số ;
- Đặt ẩn phụ ;
- Mũ hoá hai vế.

b) Phương trình có thể giải bằng phương pháp đồ thị.

## B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Giải các phương trình sau :

a) $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ ;  b) $7^{x-1} = 2^x$ ;

c) $e^{6x} - 3e^{3x} + 2 = 0$ ;  d) $e^{2x} - 4e^{-2x} = 3$.

***Giải***

a) Ta có $\frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = (1,5)^{-1}$ nên phương trình đã cho có dạng

$$(1,5)^{5x-7} = (1,5)^{-x-1}.$$

Vậy $5x - 7 = -x - 1$ hay $x = 1$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{7^x}{7} = 2^x \text{ hay } \left(\frac{7}{2}\right)^x = 7.$$

Đây là phương trình cơ bản. Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \log_{\frac{7}{2}} 7.$$

c) Đặt $t = e^{3x}$ $(t > 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Từ đó, ta có hai nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Vậy $e^{3x} = 1$ hoặc $e^{3x} = 2$ nên $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{3}\ln 2$.

d) Đặt $t = e^{2x}$ $(t > 0)$, ta có phương trình

$$t - \frac{4}{t} = 3 \text{ hay } t^2 - 3t - 4 = 0.$$

Phương trình này chỉ có một nghiệm dương $t = 4$, suy ra $e^{2x} = 4$.

Vậy $x = \frac{1}{2}\ln 4$ hay $x = \ln 2$.

Đôi khi, người ta còn giải phương trình mũ bằng phương pháp đồ thị.

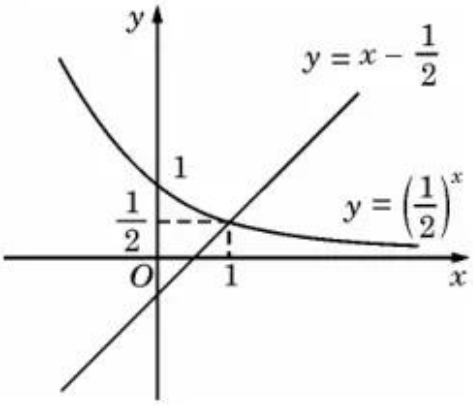
• ***Ví dụ 2***

Giải các phương trình sau bằng phương pháp đồ thị :

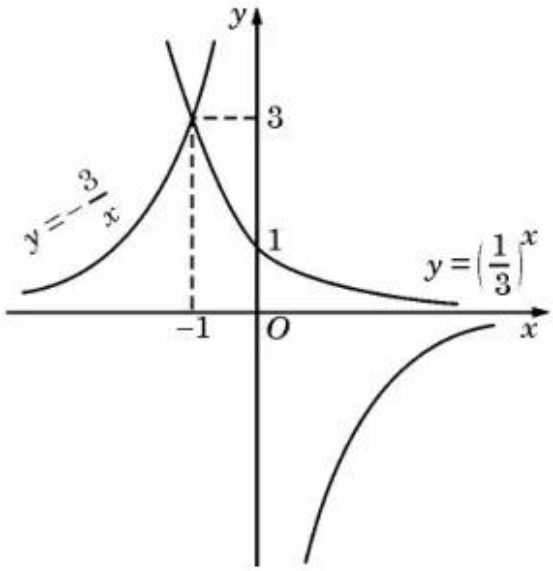
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$ ;  b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$.

***Giải***

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục toạ độ $Oxy$ (H.32), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$. Thử lại, ta thấy giá trị này thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm số nghịch biến, $y = x - \frac{1}{2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.




*Hình 32*




*Hình 33*

b) Vẽ đồ thị các hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và $y = -\frac{3}{x}$ trên cùng một hệ trục toạ độ $Oxy$ (H.33), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = -1$. Thử lại, ta thấy giá trị này thoả mãn phương trình đã cho. Mặt khác, hàm số $y = -\frac{3}{x}$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định, hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ luôn nghịch biến nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

*Ghi chú :* Giải phương trình bằng đồ thị thường được thực hiện trên máy tính.

• ***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng phương trình sau chỉ có một nghiệm $x = 1$:

$$4^x + 5^x = 9.$$

***Giải***

Ta có $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho vì $4^1 + 5^1 = 9$.

Ta chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = 4^x + 5^x$.

Ta có $f(x)$ đồng biến trên tập xác định ¡ vì $f'(x) = 4^x \ln 4 + 5^x \ln 5 > 0$ với mọi $x$ thuộc ¡ . Do đó

– Với $x > 1$ thì $f(x) > f(1)$ hay $4^x + 5^x > 9$, nên phương trình không thể có nghiệm $x > 1$.

– Với $x < 1$ thì $f(x) < f(1)$ hay $4^x + 5^x < 9$, nên phương trình không thể có nghiệm $x < 1$.

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

• ***Ví dụ 4***

Giải các phương trình sau :

a) $9^x + 2(x-2).3^x + 2x - 5 = 0$ ;  b) $x.2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1)$.

***Giải***

a) Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$. Khi đó, phương trình đã cho có dạng

$$t^2 + 2(x-2)t + 2x - 5 = 0.$$

Suy ra $t_1 = -1$ (loại) , $t_2 = 5 - 2x$.

Do đó, ta có $$3^x = 5 - 2x\,. \qquad (1)$$

Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của (1).

Mặt khác, hàm số $f(x) = 3^x$ luôn đồng biến, hàm số $g(x) = 5 - 2x$ luôn nghịch biến trên ¡ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Phương trình đã cho có thể viết lại ở dạng

$$x.2^x - x(3-x) - 2.2^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^x(x-2) + x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x(x-2) + (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)\left(2^x + x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 2^x + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2^x = 1 - x. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Ta có $x = 0$ thoả mãn (2) nên là nghiệm của (2).

Mà $f(x) = 2^x$ luôn đồng biến trên ¡ , $g(x) = 1 - x$ luôn nghịch biến trên ¡ . Do đó, $x = 0$ là nghiệm duy nhất của (2).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

• ***Ví dụ 5***

Giải các phương trình sau :

a) $\ln x + \ln(x+1) = 0$ ;  b) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ ;

c) $-\log^3 x + 2\log^2 x = 2 - \log x$ ;  d) $\dfrac{1}{4+\log_2 x} + \dfrac{2}{2-\log_2 x} = 1.$

***Giải***

a) Với điều kiện $x > 0$ (khi đó $x + 1 > 0$), phương trình đã cho tương đương với

$$\ln[x(x+1)] = \ln 1 \text{ hay } x(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Với điều kiện $x > -1$ (khi đó $x + 1 > 0$, $x + 3 > 0$, $x + 7 > 0$), phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$\ln[(x+1)(x+3)] = \ln(x+7) \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = x+7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

c) Với điều kiện $x > 0$, đặt $t = \log x$, ta có phương trình

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = 2. \end{array}\right.$$

Từ đó ta có $\left[\begin{array}{l} \log x = 1 \\ \log x = -1 \\ \log x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = \dfrac{1}{10} \\ x = 100. \end{array}\right.$

d) Với điều kiện $x > 0$, đặt $t = \log_2 x$. Khi đó $t \neq -4$, $t \neq 2$ và ta có

$$\frac{1}{4+t} + \frac{2}{2-t} = 1 \Leftrightarrow t + 10 = (4+t)(2-t) \Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$

• ***Ví dụ 6***

Giải các phương trình lôgarit sau :

a) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$ ; b) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$.

***Giải***

a) Ta có điều kiện của phương trình là $x > 1$ để $\log_2 x > 0$ và $\log_4 x > 0$. Khi đó, phương trình đã cho có thể viết ở dạng

$$\log_{2^2} \log_2 x + \log_2 \log_{2^2} x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 \log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 \log_2 x + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 \log_2 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

b) Áp dụng công thức đổi cơ số, ta có

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{\log_2 20}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x\left(1 + \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\log_2 20}\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x\left(\frac{3}{2} + \log_3 2 - \log_{20} 2\right) = 0.$$

Ta có

$$\log_3 2 > \log_3 1 = 0,$$

$$\log_{20} 2 < \log_{20} 20 = 1, \text{ tức là } \frac{3}{2} - \log_{20} 2 > 0.$$

nên $\frac{3}{2} - \log_{20} 2 + \log_3 2 > 0$. Do đó, phương trình trở thành $\log_2 x = 0$. Vậy $x = 1$.

• ***Ví dụ 7***

Giải các phương trình lôgarit sau :

a) $\log\left(x^2 - x - 6\right) + x = \log(x + 2) + 4$ ;  b) $\log_2\left(1 + \sqrt{x}\right) = \log_3 x$ .

***Giải***

a) Điều kiện để phương trình có nghĩa là

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hoặc } x > 3 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Với $x > 3$ phương trình đã cho tương đương với

$$\log\left(x^2 - x - 6\right) - \log(x + 2) = 4 - x \Leftrightarrow \log\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 4 - x$$

$$\Leftrightarrow \log(x - 3) = 4 - x. \qquad (1)$$

Ta có hàm số $f(x) = \log(x - 3)$ đồng biến khi $x > 3$, hàm số $g(x) = 4 - x$ là hàm số nghịch biến. Mà $x = 4$ thoả mãn (1). Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của (1), tức là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) Điều kiện của phương trình là $x > 0$.

Đặt $y = \log_3 x$, ta có $x = 3^y$.

Do đó, phương trình đã cho trở thành

$$\log_2\left(1 + \sqrt{3^y}\right) = y \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3^y} = 2^y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1. \qquad (2)$$

Ta thấy $y = 2$ thoả mãn phương trình (2).

Mặt khác, hàm số $f(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$ luôn nghịch biến trên ¡ vì

$$f'(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^y \ln\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y \ln\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \text{ với mọi } y \text{ thuộc ¡ .}$$

Do đó $y = 2$ là nghiệm duy nhất của (2). Khi đó, $x = 3^2 = 9$.

## C. BÀI TẬP

**2.30.** Giải các phương trình mũ sau :

a) $(0,75)^{2x-3} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$ ;

b) $5^{x^2-5x-6} = 1$ ;

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$ ;

d) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.125^{\frac{x+17}{x-3}}$.

**2.31.** Giải các phương trình mũ sau :

a) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3.5^x$ ;

b) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x}.17 + 7^x.17 = 0$ ;

c) $4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0$ ;

d) $-8^x + 2.4^x + 2^x - 2 = 0$.

**2.32.** Giải các phương trình sau bằng phương pháp đồ thị :

a) $2^{-x} = 3x + 10$ ;

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = -2x + 5$ ;

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = x + 1$ ;

d) $3^x = 11 - x$.

**2.33.** Giải các phương trình lôgarit sau :

a) $\log x + \log x^2 = \log 9x$ ;

b) $\log x^4 + \log 4x = 2 + \log x^3$ ;

c) $\log_4[(x+2)(x+3)] + \log_4 \frac{x-2}{x+3} = 2$ ;

d) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x = 2\log_3(x-2)$.

**2.34.** Giải các phương trình sau bằng phương pháp đồ thị :

a) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$ ;

b) $\log_3 x = -x + 11$ ;

c) $\log_4 x = \frac{4}{x}$ ;

d) $16^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

**2.35.** Giải các phương trình lôgarit sau :

a) $\log_2(2^x + 1).\log_2(2^{x+1} + 2) = 2$ ;

b) $x^{\log 9} + 9^{\log x} = 6$ ;

c) $x^{3\log^3 x - \frac{2}{3}\log x} = 100\sqrt[3]{10}$ ;

d) $1 + 2\log_{x+2} 5 = \log_5(x+2)$.