§6

2.36. a) $3^{|x-2|} < 3^2 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-2 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$

b) $4^{|x+1|} > 4^2 \Leftrightarrow |x+1| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1>2 \\ x+1<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-3. \end{array}\right.$

c) $2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2+3x < 2 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2. \end{array}\right.$

d) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \left(\frac{7}{9}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x^2-3x \leq -1 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$

e) $\sqrt{x+6} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x+6 \geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -6 \\ x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-6 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < 0 \\ \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 3.$

g) $\frac{1}{2}.2^{2x} + \frac{1}{4}.2^{2x} + \frac{1}{8}.2^{2x} \geq 448 \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 512 \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 2^9 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}.$

h) Đặt $t = 4^x$ $(t > 0)$, ta có hệ bất phương trình

$\begin{cases} t^2-t-6 \leq 0 \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 3 \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \leq 3 \Leftrightarrow 0 < 4^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \log_4 3.$

i) $\dfrac{3^x}{3^x - 2} - 3 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2.3^x + 6}{3^x - 2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3^x - 3}{3^x - 2} > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x > 3 \\ 3^x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < \log_3 2. \end{array}\right.$$

2.37. a) $0 < x - 1 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow 1 < x \leq 10.$

b) $\begin{cases} x > 5 \\ \log_3[(x-3)(x-5)] < \log_3 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x^2 - 8x + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 2 < x < 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 5 < x < 6.$$

c) $\begin{cases} x - 7 > 0 \\ \dfrac{2x^2 + 3}{x - 7} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ 2x^2 + 3 > x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ 2x^2 - x + 10 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ x \in \text{¡} \end{cases} \Leftrightarrow x > 7.$$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Leftrightarrow \log_2 x^2 < 1 \Leftrightarrow \log_2 x^2 < \log_2 2 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 2$

$$\Leftrightarrow 0 < |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < 0 \text{ hoặc } 0 < x < \sqrt{2}.$$

e) Đặt $t = \log x$ với điều kiện $t \neq 5$, $t \neq -1$, ta có

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} < 1 \Leftrightarrow \frac{t + 1 + 10 - 2t}{5 + 4t - t^2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 6}{t^2 - 4t - 5} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-2)(t-3)}{(t+1)(t-5)} > 0 \Leftrightarrow t < -1 \text{ hoặc } 2 < t < 3 \text{ hoặc } t > 5.$$

Suy ra $\log x < -1$ hoặc $2 < \log x < 3$ hoặc $\log x > 5$.

Vậy $x < \dfrac{1}{10}$ hoặc $100 < x < 1000$ hoặc $x > 100\,000$.

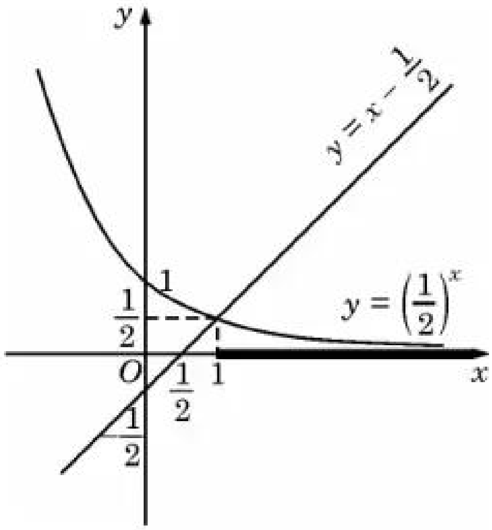
g) Với điều kiện $x > 0$, $x \neq 1$, đặt $t = \log_4 x$, ta có $4t - \dfrac{33}{t} \leq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{4t^2 - t - 33}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(4t + 11)(t - 3)}{t} \leq 0$

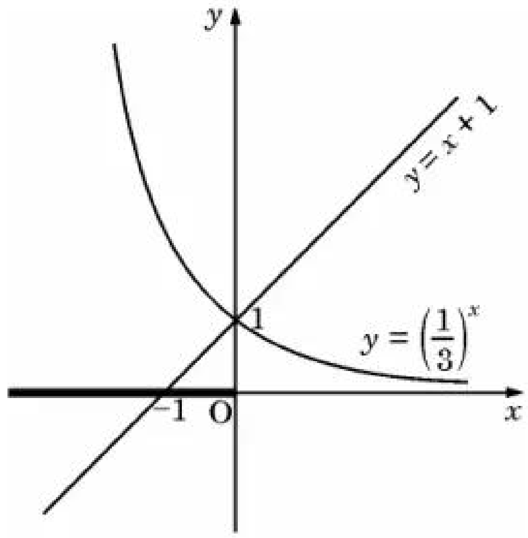
$\Leftrightarrow t \leq -\dfrac{11}{4}$ hoặc $0 < t \leq 3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x \leq -\dfrac{11}{4} \\ 0 < \log_4 x \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 4^{-\frac{11}{4}} \\ 1 < x \leq 64. \end{array}\right.$

2.38. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.57), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$. Với $x > 1$ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nằm phía dưới đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1\ ;\ +\infty)$.



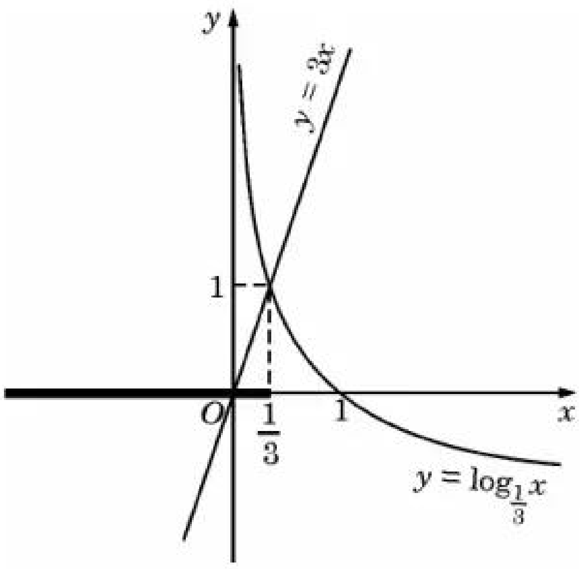
Hình 57



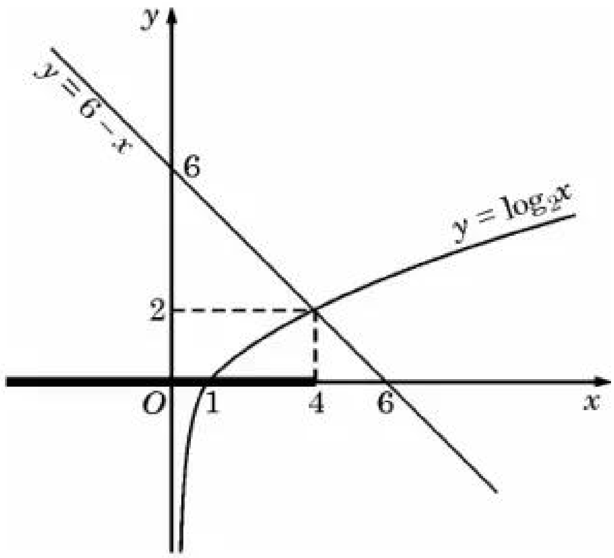
Hình 58

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ và đường thẳng $y = x + 1$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H.58), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 0$. Khi $x < 0$ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = x + 1$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty\ ;\ 0]$.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ và đường thẳng $y = 3x$ trên cùng một hệ trục toạ độ ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ (H.59). Khi $x < \frac{1}{3}$ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 3x$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.



Hình 59



Hình 60

d) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$ và đường thẳng $y = 6 - x$ trên cùng một hệ trục toạ độ, ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 4$ (H.60). Khi $x < 4$, đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$ nằm phía dưới đường thẳng $y = 6 - x$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty\ ;\ 4]$.