§6. Bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất phương trình mũ

a) *Bất phương trình mũ cơ bản*

Dạng 1 : $a^x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$

– Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là ¡ .

– Nếu $b > 0$ và :

• $a > 1$, tập nghiệm là $(\log_a b\,; +\infty)$,

• $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(-\infty\,; \log_a b)$.

Dạng 2 : $a^x \geq b$ $(a > 0, a \neq 1)$

– Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm là ¡ .

– Nếu $b > 0$ và :

• $a > 1$, tập nghiệm là $[\log_a b\,; +\infty)$,

• $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(-\infty\,; \log_a b]$

Dạng 3 : $a^x < b$ $(a > 0, a \neq 1)$

– Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm là $\varnothing$.

– Nếu $b > 0$ và :

• $a > 1$, tập nghiệm là $(-\infty\,; \log_a b)$,

• $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(\log_a b\,; +\infty)$.

Dạng 4 : $a^x \leq b$ $(a > 0, a \neq 1)$

– Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm là $\varnothing$.

– Nếu $b > 0$ và :

• $a > 1$, tập nghiệm là $(-\infty\,; \log_a b]$,

• $0 < a < 1$, tập nghiệm là $[\log_a b\,; +\infty)$.

b) *Bất phương trình mũ đơn giản*

Để giải các bất phương trình mũ, ta có thể biến đổi để đưa về bất phương trình mũ cơ bản hoặc bất phương trình đại số.

2. Bất phương trình lôgarit

a) *Bất phương trình lôgarit cơ bản*

Dạng 1 : $\log_a x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$

- Nếu $a > 1$, tập nghiệm là $\left(a^b\ ;\ +\infty\right)$.
- Nếu $0 < a < 1$, tập nghiệm là $\left(0\ ;\ a^b\right)$.

Dạng 2 : $\log_a x \geq b$ $(a > 0, a \neq 1)$

- Nếu $a > 1$, tập nghiệm là $[a^b;+\infty)$.
- Nếu $0 < a < 1$, tập nghiệm là $\left(0\ ;\ a^b\right]$.

Dạng 3 : $\log_a x < b$ $(a > 0, a \neq 1)$

- Nếu $a > 1$, tập nghiệm là $(0\ ;\ a^b)$.
- Nếu $0 < a < 1$, tập nghiệm là $\left(a^b\ ;+\infty\right)$.

Dạng 4 : $\log_a x \leq b$ $(a > 0, a \neq 1)$

- Nếu $a > 1$, tập nghiệm là $\left(0\ ;\ a^b\right]$.
- Nếu $0 < a < 1$, tập nghiệm là $\left[a^b\ ;\ +\infty\right)$.

b) *Bất phương trình lôgarit đơn giản*

Để giải các bất phương trình lôgarit, ta có thể biến đổi để đưa về bất phương trình lôgarit cơ bản hoặc bất phương trình đại số.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$;   b) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$;   c) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$.

Giải

a) Vì cơ số $\frac{2}{5}$ bé hơn 1 nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2-x} < x.$$

Ta có điều kiện của bất phương trình này là $0 < x \le 2$. Khi đó, bình phương hai vế, ta được

$$2 - x < x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 < x \le 2$.

b) Vì $2,5 = \frac{1}{0,4} = (0,4)^{-1}$ nên bất phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$(0,4)^x - 2,5.(0,4)^{-x} - 1,5 > 0.$$

Đặt $t = (0,4)^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình

$$t^2 - 1,5t - 2,5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \text{ (loại)} \\ t > 2,5. \end{array}\right.$$

Khi đó, ta có $(0,4)^x > 2,5$ hay $(0,4)^x > (0,4)^{-1}$.

Đây là bất phương trình mũ cơ bản với cơ số nhỏ hơn 1.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -1$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4^x}{4^x - 3^x} - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{4^x - 4.4^x + 4.3^x}{4^x - 3^x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3.4^x + 4.3^x}{4^x - 3^x} < 0.$$

Chia cả tử và mẫu cho $4^x (4^x > 0)$, ta được $\dfrac{-3+4\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^x} < 0.$

Đặt $t = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình $\dfrac{4t-3}{t-1} > 0$, với nghiệm là $t < \dfrac{3}{4}$ hay $t > 1$.

Vì $t > 0$ nên ta có

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \dfrac{3}{4} \\ t > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \left(\dfrac{3}{4}\right)^x < \dfrac{3}{4} \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0. \end{array}\right.$$

• ***Ví dụ 2***

Giải các bất phương trình lôgarit sau :

a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right) \geq -4$;

b) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right) < 1$;

c) $\log^2_{0,2} x - 5\log_{0,2} x < -6$.

Giải

a) Ta có điều kiện của bất phương trình là $x^2 + 2x - 8 > 0$. Khi đó, ta có thể viết bất phương trình dưới dạng

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Vì cơ số $\dfrac{1}{2}$ nhỏ hơn 1 nên bất phương trình trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2+2x-8 > 0 \\ x^2+2x-8 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8 > 0 \\ x^2+2x-24 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ hoặc } x > 2 \\ -6 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < -4 \\ 2 < x \leq 4 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-6\,;-4) \cup (2\,;4]$.

b) Ta có $\log_3 \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)<1 \Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)<\log_3 3$

$\Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)<3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} 1<\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)<\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \Leftrightarrow 1>x^2-1>\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2>x^2>\frac{9}{8} \Leftrightarrow \sqrt{2}>|x|>\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\sqrt{2}\,;\frac{-3}{2\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\,;\sqrt{2}\right)$.

c) Với điều kiện $x>0$, đặt $t=\log_{0,2} x$, ta có bất phương trình

$$t^2-5t+6<0 \Leftrightarrow 2<t<3,$$

suy ra $2<\log_{0,2} x<3$ hay $\log_{0,2} 0{,}04<\log_{0,2} x<\log_{0,2} 0{,}008$.

Vì cơ số 0,2 nhỏ hơn 1 nên ta có $0{,}008<x<0{,}04$ (thoả mãn điều kiện $x>0$).

• ***Ví dụ 3***

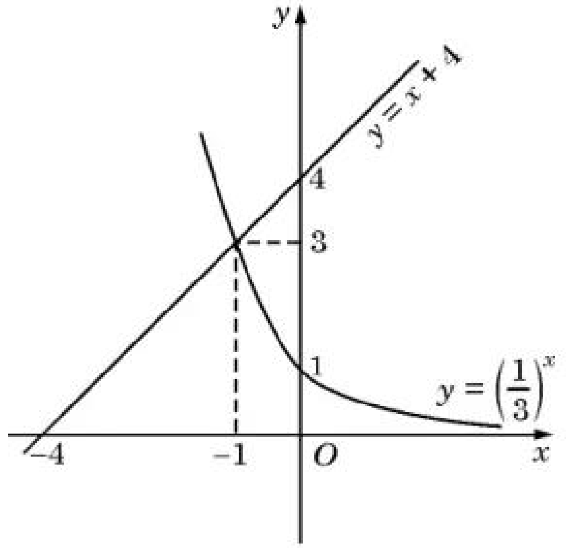
Giải các bất phương trình sau bằng đồ thị :

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq x+4$; b) $\log_3 x>4-x$.

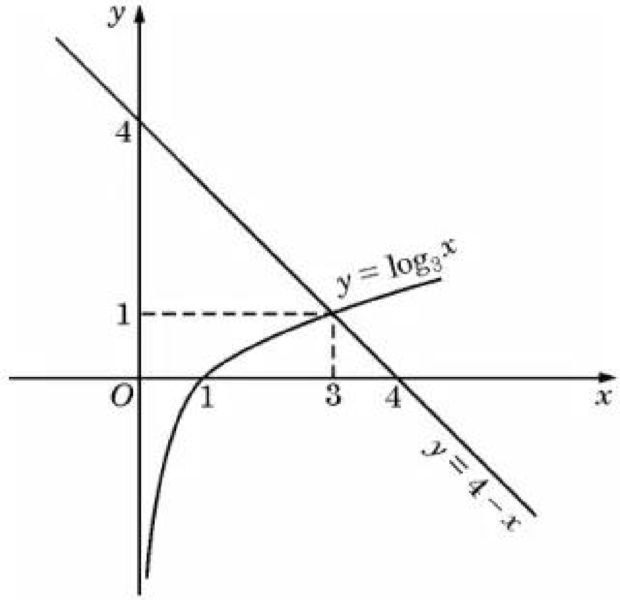
Giải

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ và đường thẳng $y=x+4$ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy (H.34), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm duy nhất có hoành độ $x=-1$. Từ đồ thị ta thấy : Khi $x \geq -1$ thì đường cong $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ nằm phía dưới đường thẳng $y=x+4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-1\,;+\infty)$.



Hình 34



Hình 35

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ và đường thẳng $y = 4 - x$ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy (H.35), ta thấy chúng cắt nhau tại điểm duy nhất có hoành độ $x = 3$.

Từ đồ thị ta thấy đường cong $y = \log_3 x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 4 - x$ khi $x > 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(3 ; +\infty)$.

C. BÀI TẬP

2.36. Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $3^{|x-2|} < 9$;

b) $4^{|x+1|} > 16$;

c) $2^{-x^2+3x} < 4$;

d) $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \dfrac{9}{7}$;

e) $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x$;

g) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$;

h) $16^x - 4^x - 6 \leq 0$;

i) $\dfrac{3^x}{3^x - 2} < 3$.

2.37. Giải các bất phương trình lôgarit sau :

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq -2$;

b) $\log_3(x-3) + \log_3(x-5) < 1$;

c) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+3}{x-7} < 0$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > 0$;

e) $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x} < 1$;

g) $4\log_4 x - 33\log_x 4 \leq 1$.

2.38. Giải các bất phương trình sau bằng đồ thị :

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < x - \dfrac{1}{2}$;

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geq x + 1$;

c) $\log_{\frac{1}{3}} x > 3x$;

d) $\log_2 x \leq 6 - x$.