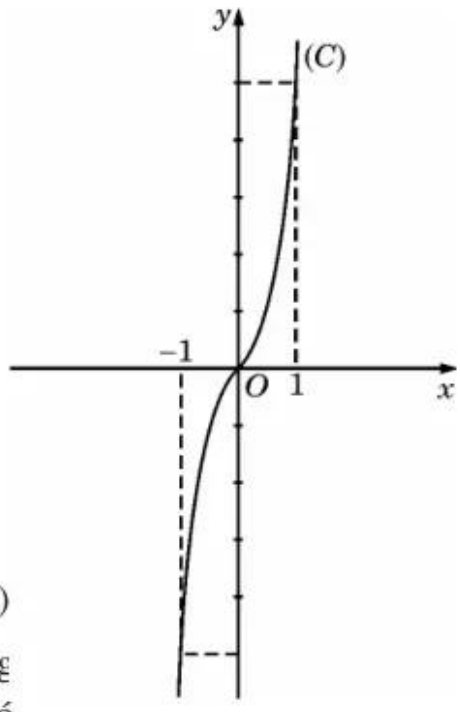
Bài tập ôn chương I

1.32. a) $y = 4x^3 + x,\ y' = 12x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 9

Đồ thị như trên Hình 9.

b) Giả sử tiếp điểm cần tìm có toạ độ $(x_0\ ;\ y_0)$ thì $f'(x_0) = 12x_0^2 + 1 = 13$ (vì tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) : $y = 13x + 1$). Từ đó ta có $x_0 = \pm 1$.

Vậy có hai tiếp tuyến phải tìm là $y = 13x \pm 8$.

c) Vì $y' = 12x^2 + m$ nên :

• Với $m \geq 0$ ta có $y' > 0$ (khi $m = 0$; $y' = 0$ tại $x = 0$). Vậy hàm số (1) luôn luôn đồng biến khi $m \geq 0$.

• Với $m < 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-m}{12}}$.

Từ đó suy ra

$$y' > 0 \text{ với } -\infty < x < -\sqrt{\frac{-m}{12}} \text{ và } \sqrt{\frac{-m}{12}} < x < +\infty.$$

$$y' < 0 \text{ với } -\sqrt{\frac{-m}{12}} < x < \sqrt{\frac{-m}{12}}.$$

Vậy hàm số (1) đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty\ ;\ -\sqrt{\dfrac{-m}{12}}\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{-m}{12}}\ ;\ +\infty\right)$

và nghịch biến trên khoảng $\left(-\sqrt{\dfrac{-m}{12}}\ ;\ \sqrt{\dfrac{-m}{12}}\right)$.

1.33. Hàm số $y = x^3 + mx^2 - 3$ xác định và có đạo hàm trên ¡ .

$$y' = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m).$$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{-2m}{3} \neq 0.$$

Muốn vậy phải có $m \neq 0$.

b) Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + mx^2 - 3\right) = +\infty$ và $y(0) = -3 < 0$.

Vậy với mọi m, phương trình $x^3 + mx^2 - 3 = 0$ luôn luôn có nghiệm dương.

c) Phương trình $f(x) = x^3 + mx^2 - 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ cùng dấu, tức là

$$f(0)f\left(-\frac{2m}{3}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow (-3)\left(-\frac{8m^3}{27} + \frac{4m^3}{9} - 3\right) > 0 \Leftrightarrow 8m^3 - 12m^3 + 81 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 < 81 \text{ hay } m < 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \quad (m \neq 0).$$

1.34. a) $y = -\left(m^2 + 5m\right)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$.

$$y' = -3\left(m^2 + 5m\right)x^2 + 12mx + 6.$$

Hàm số đơn điệu trên ¡ khi và chỉ khi y' không đổi dấu.

Ta xét các trường hợp :

• $m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -5. \end{array}\right.$

– Với $m = 0$ thì $y' = 6$ nên hàm số luôn đồng biến.

– Với $m = -5$ thì $y' = -60x + 6$ đổi dấu khi x đi qua $\frac{1}{10}$.

• Với $m^2 + 5m \neq 0$. Khi đó, y' không đổi dấu nếu

$$\Delta' = 36m^2 + 18\left(m^2 + 5m\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 5m \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq m \leq 0.$$

– Với điều kiện đó, ta có $-3(m^2+5m)>0$ nên $y'>0$ và do đó hàm số đồng biến trên ¡ .

Vậy với điều kiện $-\frac{5}{3}\le m\le 0$ thì hàm số đồng biến trên ¡ .

b) Nếu hàm số đạt cực đại tại $x=1$ thì $y'(1)=0$. Khi đó :

$$y'(1)=-3m^2-3m+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2.\end{array}\right.$$

Mặt khác, $y''=-6(m^2+5m)x+12m$.

• Với $m=1$ thì $y''=-36x+12$. Khi đó, $y''(1)=-24<0$, hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

• Với m = – 2 thì $y''=36x-24$. Khi đó, $y''(1)=12>0$, hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Vậy với $m=1$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

1.35 a) Ta có $$y=\frac{(a-1)x^3}{3}+ax^2+(3a-2)x.$$

$$y'=(a-1)x^2+2ax+3a-2.$$

• Với $a=1$, $y'=2x+1$ đổi dấu khi x đi qua $-\frac{1}{2}$. Hàm số không luôn luôn đồng biến.

• Với $a\ne 1$ thì với mọi x mà tại đó $y'\ge 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-1>0\\\Delta'=-2a^2+5a-2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow a\ge 2.$$

($y'=0$ chỉ tại $x=-2$, khi $a=2$).

Vậy với $a\ge 2$ hàm số luôn luôn đồng biến.

b) Đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $y=0$ có ba nghiệm phân biệt. Ta có

$$y=0\Leftrightarrow x\left[\frac{(a-1)x^2}{3}+ax+3a-2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x\left[(a-1)x^2+3ax+9a-6\right]=0.$$

$y = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình

$$(a-1)x^2 + 3ax + 9a - 6 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt khác 0. Muốn vậy, ta phải có

$$\begin{cases} a - 1 \neq 0 \\ \Delta = 9a^2 - 4(a-1)(9a-6) > 0 \\ 9a - 6 \neq 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được :

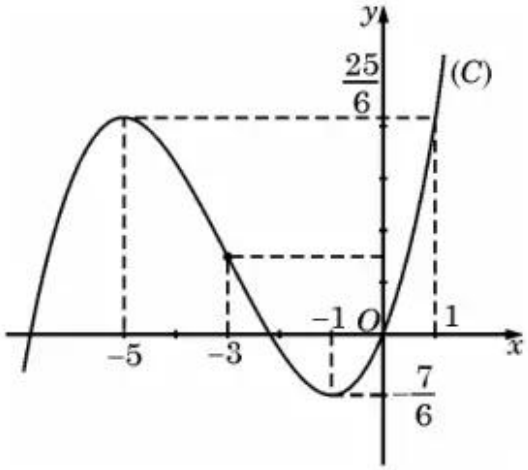
$$\frac{10-\sqrt{28}}{9} < a < \frac{2}{3};\ \frac{2}{3} < a < 1\ ;\ 1 < a < \frac{10+\sqrt{28}}{9}.$$

c) Khi $a = \frac{3}{2}$ thì $y = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2}$.

$$y' = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{5}{2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5. \end{array}\right.$$



Hình 10

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{25}{6}$	↘	$-\frac{7}{6}$	↗	$+\infty$

Đồ thị như trên Hình 10.

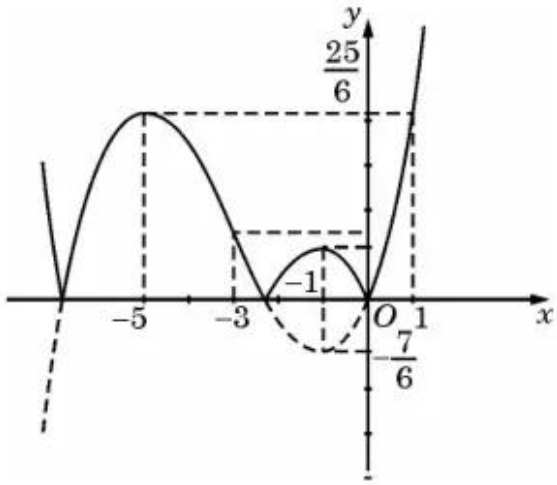
Vì

$$\left|\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2}\right| = \begin{cases} \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} & \text{nếu } \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} \geq 0 \\ -\left(\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2}\right) & \text{nếu } \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} < 0 \end{cases}$$

nên từ đồ thị (C) ta suy ngay ra đồ thị của hàm số

$$y = \left|\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2}\right|$$

như trên Hình 11.



Hình 11

1.36. a) $y = x^4 - 2x^2$,

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

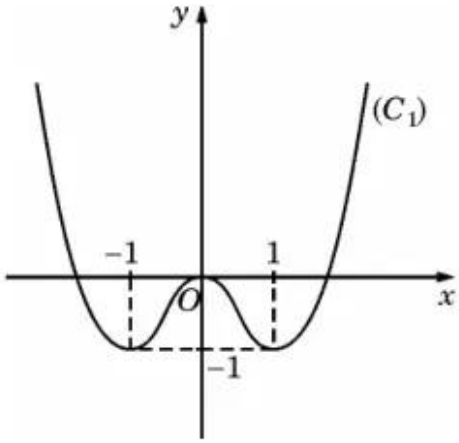
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị như Hình 12.

b) $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Để (C_m) tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.



Hình 12

• Nếu $m \le 0$ thì $x^2 - m \ge 0$ với mọi x nên đồ thị không thể tiếp xúc với trục Ox tại hai điểm phân biệt

• Nếu $m > 0$ thì $y' = 0$ khi $x = 0$, $x = \pm\sqrt{m}$.

$f(\sqrt{m}) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + m^3 - m^2 = 0$

$$\Leftrightarrow m^2(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (do } m > 0).$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

1.37. a) Bạn đọc tự giải.

b) *Cách 1*

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ là

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y'(x_0) = \dfrac{-9}{(x_0 - 2)^2}$. Ta có

$$y = -\frac{9}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + y_0 \text{ với } y_0 = \frac{3(x_0 + 1)}{x_0 - 2}.$$

Để đường thẳng đó đi qua $O(0\ ;\ 0)$, điều kiện cần và đủ là

$$\frac{9x_0}{(x_0 - 2)^2} + \frac{3(x_0 + 1)}{x_0 - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 2 \\ x_0^2 + 2x_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -1 \pm \sqrt{3}.$$

- Với $x_0 = -1 + \sqrt{3}$, ta có phương trình tiếp tuyến $y = -\dfrac{3}{2}(2 + \sqrt{3})x$.
- Với $x_0 = -1 - \sqrt{3}$, ta có phương trình tiếp tuyến $y = -\dfrac{3}{2}(2 - \sqrt{3})x$.

Cách 2

Phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O có dạng $y = kx$.

Để xác định toạ độ tiếp điểm của hai đường

$$y = \frac{3(x + 1)}{x - 2} \text{ và } y = kx,$$

ta giải hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{3(x + 1)}{x - 2} = kx \\ -\dfrac{9}{(x - 2)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3(x + 1)}{x - 2} + \dfrac{9x}{(x - 2)^2} = 0 \\ -\dfrac{9}{(x - 2)^2} = k. \end{cases}$$

Giải phương trình thứ nhất, ta được $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$k_1 = -\frac{3}{2}(2+\sqrt{3}), \quad k_2 = -\frac{3}{2}(2-\sqrt{3}).$$

Từ đó có hai phương trình tiếp tuyến là

$$y = -\frac{3}{2}(2+\sqrt{3})x \text{ và } y = -\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})x.$$

c) Để tìm trên (C) các điểm có toạ độ nguyên, ta có

$$y = \frac{3(x+1)}{x-2} \Leftrightarrow y = 3 + \frac{9}{x-2}.$$

Điều kiện cần và đủ để $M(x\ ;\ y) \in (C)$ có toạ độ nguyên là $x \in \mathbf{Z}$ và $\frac{9}{x-2} \in \mathbb{Z}$

hay $9 \vdots (x-2)$. Khi đó, $x-2$ nhận các giá trị $\pm 1\ ;\ \pm 3\ ;\ \pm 9$

hay nhận các giá trị $1\ ;\ 3\ ;\ -1\ ;\ 5\ ;\ -7\ ;\ 11$.

Do đó, ta có sáu điểm trên (C) có toạ độ nguyên là

$$(1\ ;\ -6),\ (3\ ;\ 12)\ ;\ (-1\ ;\ 0),\ (5\ ;\ 6)\ ;\ (-7\ ;\ 2),\ (11\ ;\ 4).$$

1.38. a) Bạn đọc tự giải.

b) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$;

Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$;

Do đó, giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(3\ ;\ 1)$. Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 1, \end{cases}$$

ta được $Y + 1 = \frac{X+5}{X} \Leftrightarrow Y = \frac{X+5}{X} - 1 \Leftrightarrow Y = \frac{5}{X}$.

Vì $Y = \frac{5}{X}$ là hàm số lẻ nên đồ thị (C) của hàm số này có tâm đối xứng là gốc toạ độ I của hệ toạ độ IXY.

c) Giả sử $M(x_0\ ;\ y_0) \in (C)$. Gọi d_1 là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và d_2 là khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang, ta có :

$$d_1 = |x_0 - 3|,\ d_2 = |y_0 - 1| = \frac{5}{|x_0 - 3|}.$$

Từ giả thiết suy ra $|x_0 - 3| = \dfrac{5}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow x_0 = 3 \pm \sqrt{5}$.

Có hai điểm thoả mãn đầu bài, đó là hai điểm có hoành độ $x_0 = 3 \pm \sqrt{5}$.

1.39. Hàm số $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ là hàm số liên tục và có đạo hàm trên ¡ .

Vì $f(0) = -8 < 0$, $f(1) = 10 > 0$ nên tồn tại một số $x_0 \in (0\,;1)$ sao cho $f(x_0) = 0$, tức là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Mặt khác, ta có $y' = 15x^4 + 5 > 0$, $\forall x \in$ nên hàm số đã cho luôn luôn đồng biến. Vậy phương trình đó chỉ có một nghiệm.