Bài tập ôn chương II

2.39. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{\sqrt{3}}$.

Tập xác định : $D = (0\,;+\infty)$.

$$y' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}.$$

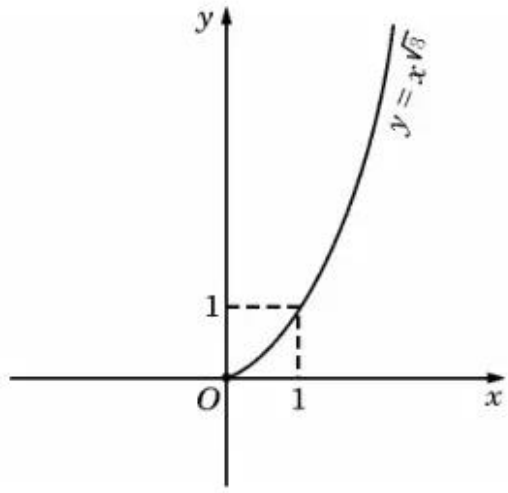
$y' > 0, \forall x \in D$ nên hàm số luôn đồng biến.

$$\lim_{x\to 0^+} y = 0,\ \lim_{x\to +\infty} y = +\infty.$$

Đồ thị không có tiệm cận.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'	‖	$+$	
y	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$



Hình 61

Đồ thị (H.61).

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{\frac{1}{\pi}}$.

Tập xác định : $D = (0 ; +\infty)$.

$$y' = \frac{1}{\pi} x^{\frac{1}{\pi}-1}.$$

$y' > 0, \forall x \in D$ nên hàm số luôn đồng biến.

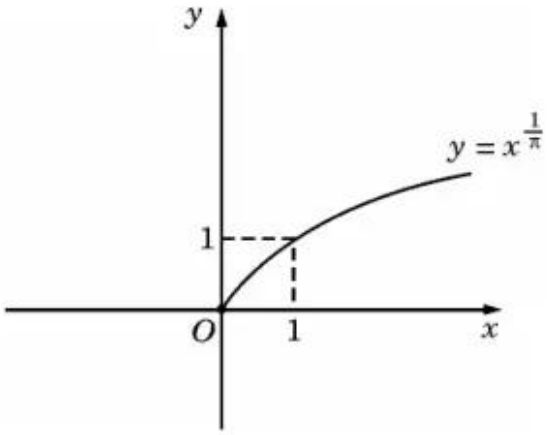
$$\lim_{x \to 0^+} y = 0, \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

Đồ thị không có tiệm cận.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'	‖	$+$	
y	‖ 0	↗	$+\infty$

• Đồ thị (H.62).



Hình 62

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{-e}$.

Tập xác định : $D = (0 ; +\infty)$.

$$y' = -ex^{-e-1}.$$

$y' < 0, \forall x \in D$ nên hàm số luôn nghịch biến.

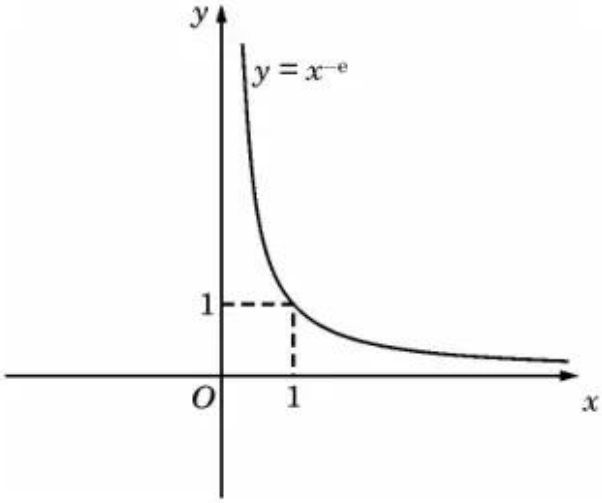
$$\lim_{x \to 0^+} y = +\infty, \lim_{x \to +\infty} y = 0.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	↘	0

Đồ thị (H.63).



Hình 63

2.40. a) Hàm số xác định khi

$$4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} > 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Vậy tập xác định là $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

b) $D = \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$.

c) Hàm số xác định khi

$$\log x + \log(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log[x(x+2)] \geq \log 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x \geq -1 + \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1 + \sqrt{2}.$$

Vậy tập xác định là $D = [-1 + \sqrt{2}; +\infty)$.

d) Tương tự câu c), $D = [\sqrt{2}; +\infty)$.

2.41. a) Ta có tập xác định của cả hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ đều là ¡ . Mặt khác

$$f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x), \qquad g(-x) = \frac{a^{-x} - a^x}{2} = -g(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

b) Ta có $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \geq \sqrt{a^x a^{-x}} = 1, \ \forall x \in$ ¡

và $$f(0) = \frac{a^0 + a^0}{2} = 1.$$

Vậy $\min\limits_{\mathbf{R}} f(x) = f(0) = 1$.

2.42. a) Ta có $$a^m + b^m < c^m \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < 1. \qquad (1)$$

Theo đề bài $a + b = c$, $a > 0$, $b > 0$ nên $0 < \frac{a}{c} < 1$, $0 < \frac{b}{c} < 1$.

Suy ra với $m > 1$ thì $\left(\frac{a}{c}\right)^m < \left(\frac{a}{c}\right)^1$; $\left(\frac{b}{c}\right)^m < \left(\frac{b}{c}\right)^1$.

Từ đó ta có $\left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$.

Vậy (1) đúng và ta có điều phải chứng minh.

b) Chứng minh tương tự.

2.43. a) Đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục tung lên trên 3 đơn vị.

b) Đồ thị của hàm số $y = 2^{x+1}$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = 2^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục hoành sang trái 1 đơn vị.

c) Đồ thị của hàm số $y = 3^{x-2}$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = 3^x$ bằng phép tịnh tiến song song với trục hoành sang phải 2 đơn vị.

2.44. a) Đồ thị của hàm số $y = \log_3(x-1)$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang bên phải 1 đơn vị.

b) Đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành sang bên trái 1 đơn vị.

c) Đồ thị của hàm số $y = 1 + \log_3 x$ nhận được từ đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ bằng cách tịnh tiến song song với trục tung lên trên 1 đơn vị.

2.45. a) $y' = -6(2+3x)^{-3}$; b) $y' = \begin{cases} 2(3x-2)^{-\frac{1}{3}} & \text{nếu } x > \frac{2}{3} \\ -2(2-3x)^{-\frac{1}{3}} & \text{nếu } x < \frac{2}{3} \end{cases} = \frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}}$ $(x \neq \frac{2}{3})$;

c) $y' = -\frac{1}{\sqrt[3]{(3x-7)^4}}$;

d) $y' = -9x^{-4} - \frac{1}{x\ln 3}$;

e) $y' = 6x\log_2 x + \frac{3x^2-2}{x\ln 2}$;

g) $y' = -\tan x$;

h) $y' = e^x(\sin x + \cos x)$;

i) $y' = \frac{x(e^x + e^{-x}) - e^x + e^{-x}}{x^2}$.

2.46. a) $x = 1$.

b) Đặt $t = e^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình $t^2 - 3t - 4 + \frac{12}{t} = 0$

hay $t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 3. \end{array}\right.$

Do đó $\left[\begin{array}{l} e^x = 2 \\ e^x = 3 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x = \ln 2 \\ x = \ln 3. \end{array}\right.$

c) $3.4^x + 27.9^x = 24.4^x - \frac{9}{2}.9^x \Leftrightarrow 63.9^x = 42.4^x \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

d) $\frac{1}{2}.2^{x^2} - 3^{x^2} = \frac{1}{3}.3^{x^2} - 4.2^{x^2} \Leftrightarrow \frac{9}{2}.2^{x^2} = \frac{4}{3}.3^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

2.47. a) Với điều kiện $x > 1$ ta có phương trình $\ln(4x+2) = \ln[x(x-1)]$

$\Leftrightarrow 4x + 2 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{33}}{2}.$$

b) Với điều kiện $x > 0$, ta có phương trình $\log_2(3x+1)[\log_3 x - 2] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(3x+1) = 0 \\ \log_3 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 9.$$

c) Với điều kiện $x > 0$, ta có phương trình $4^{\log_3 x}.5^{\log_3 x} = 400$

$\Leftrightarrow 20^{\log_3 x} = 20^2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$ (thoả mãn điều kiện).

d) Đặt $t = \ln x$ $(x > 0)$, ta có phương trình $t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t-3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 2 \\ \ln x = -2 \\ \ln x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e^2 \\ x = e^{-2} \\ x = e^3. \end{array}\right.$$

2.48. a) Với điều kiện $x > 0$, ta có phương trình $e^2.e^{\ln x} = x + 3$

$\Leftrightarrow e^2.x = x + 3 \Leftrightarrow x(e^2 - 1) = 3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{e^2 - 1}$ (thoả mãn điều kiện).

b) Tương tự câu a), $x = e^2$.

c) Với điều kiện $x > 3$ ta có

$$\left[\begin{array}{l} 5 - x = 0 \\ \log(x - 3) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

2.49. a) $8,4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 8,4^0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow x < 3.$

b) $2^{|x-2|} > 2^{2|x+1|} \Leftrightarrow |x - 2| > 2|x + 1| \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 4(x^2 + 2x + 1)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0.$

c) $2^{2x} - 2.2^x + 8 < 2^{3x}.2^{1-x} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2.2^x - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x, t > 0 \\ t^2 + 2t - 8 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x, t > 0 \\ t < -4 \text{ hoặc } t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

d) Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình $\dfrac{1}{t+5} \le \dfrac{1}{3t-1}$.

Vì vế trái dương nên vế phải cũng phải dương, tức là $3t - 1 > 0$. Từ đó, ta có hệ

$$\begin{cases} 3t - 1 \le t + 5 \\ 3t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t \le 3.$$

Do đó $\dfrac{1}{3} < 3^x \le 3$. Vậy $-1 < x \le 1$.

2.50. a) $\dfrac{1}{e^2} < x < e$;

b) $(0,2)^3 \le x \le 25$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ x^2 - x - 2 < (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > 2 \\ x < 3 \\ x < \dfrac{11}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -1 \text{ hoặc } 2 < x < \frac{11}{5}.$$

Vậy tập nghiệm là $(-\infty\,;-1) \cup \left(2\,;\dfrac{11}{5}\right)$.

d) $\ln|(x-2)(x+4)| \le \ln 8 \Leftrightarrow |x^2 + 2x - 8| \le 8 \Leftrightarrow -8 \le x^2 + 2x - 8 \le 8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x \ge 0 \\ x^2 + 2x - 16 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \text{ hoặc } x \ge 0 \\ -1 - \sqrt{17} \le x \le -1 + \sqrt{17} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{17} \le x \le -2 \text{ hoặc } 0 \le x \le -1 + \sqrt{17}.$$

Vậy tập nghiệm là $\left[-1 - \sqrt{17}\,;-2\right] \cup \left[0\,;-1 + \sqrt{17}\right]$.

2.51. a) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 7 > 0 \\ \ln(x+1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 7 < 0 \\ \ln(x+1) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{7}{2} \\ x + 1 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{7}{2} \\ 0 < x + 1 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{7}{2} \\ \begin{cases} x < \dfrac{7}{2} \\ -1 < x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{7}{2} \\ -1 < x < 0. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm là $(-1;\,0) \cup \left(\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right)$.

b) Tương tự câu a), tập nghiệm là $\left(\dfrac{1}{10}\,;5\right)$.

c) Đặt $t = \log_2 x$, ta có bất phương trình $2t^3 + 5t^2 + t - 2 \ge 0$

hay $(t+2)(2t^2 + t - 1) \ge 0$ có nghiệm $-2 \le t \le -1$ hoặc $t \ge \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$ hoặc $x \ge \sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right)$.

d) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} 3e^x - 2 > 0 \\ \ln(3e^x - 2) \le \ln e^{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x > \frac{2}{3} \\ e^{2x} - 3e^x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > \frac{2}{3} \\ e^x \le 1 \text{ hoặc } e^x \ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x \ge 2 \\ \frac{2}{3} < e^x \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \ln 2 \\ \ln\frac{2}{3} < x \le 0. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm là $\left(\ln\frac{2}{3}\,;\,0\right] \cup \left[\ln 2\,;\,+\infty\right)$.

2.52. a) $n \ge \log_{\frac{1}{2}} 10^{-9}$ hay $n \ge 9\log_2 10 \approx 29,897$.

Vì n là số tự nhiên bé nhất nên $n = 30$.

b) $n = 4$;

c) $n = 16$;

d) $n = 15$.