LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ ÔN TẬP CUỐI NĂM

5.1. a) • a và b thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + a + b = 1 \\ 9 + 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3. \end{cases}$$

• c và d thoả mãn hệ phương trình

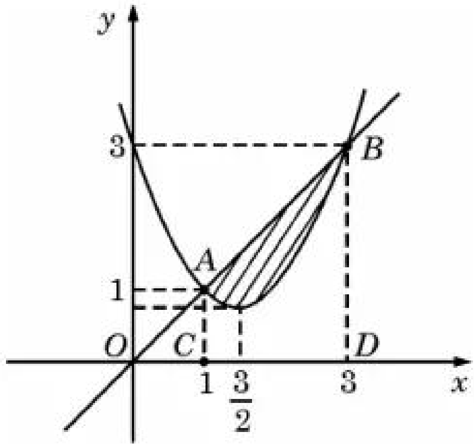
$$\begin{cases} c + d = 1 \\ 3c + d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

b) (H.82) Ta có hai hàm số tương ứng là

$$y = x^2 - 3x + 3 \text{ và } y = x.$$

Vậy $S = \int\limits_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{4}{3}$ (đơn vị diện tích).



Hình 82

c) $V = V_1 - V_2$, trong đó V_1 là thể tích vật thể tròn xoay sinh ra do quay hình thang $ACDB$ quanh trục Ox, V_2 là thể tích vật thể tròn xoay sinh ra do quay hình thang cong $ACDB$ quanh trục Ox.

Ta có $\quad V_1 = \pi\int\limits_1^3 x^2 dx = \dfrac{26}{3}\pi$;

$$V_2 = \pi\int\limits_1^3 \left(x^2 - 3x + 3\right)^2 dx = \frac{22}{5}\pi .$$

Vậy $\quad V = \dfrac{26}{3}\pi - \dfrac{22}{5}\pi = \dfrac{64}{15}\pi$ (đơn vị thể tích).

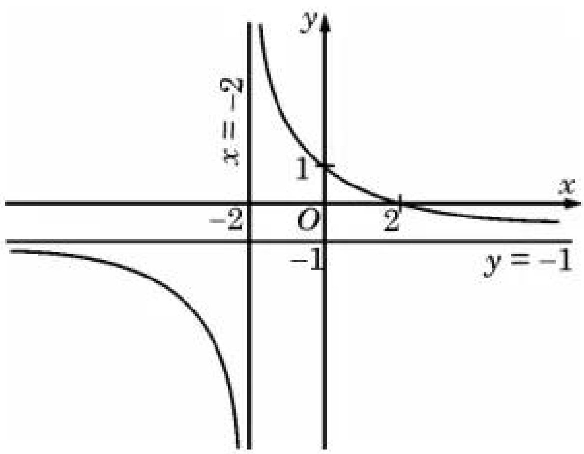
5.2. a) $y = \dfrac{-x+2}{x+2}$.

• Tập xác định : $D =$ ¡ $\setminus \{-2\}$.

• Ta có $\quad y' = -\dfrac{4}{(x+2)^2}$;

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1



Hình 83

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -2)$ và $(-2\ ;\ +\infty)$.

• Tiệm cận đứng $x = -2$ vì $\lim\limits_{x \to -2^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^-} y = -\infty$.

Tiệm cận ngang $y = -1$ vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -1$.

Giao với các trục toạ độ : $(0\ ;\ 1)$; $(2\ ;\ 0)$.

Đồ thị như trên Hình 83.

b) Tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc $k = -2$ (vì vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x - 42$).

Hoành độ tiếp điểm thoả mãn phương trình

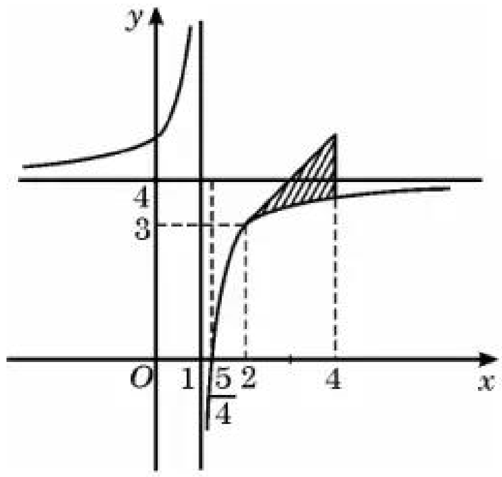
$$\frac{-4}{(x+2)^2} = -2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 + \sqrt{2} \\ x_2 = -2 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ứng với $x_1 = -2 + \sqrt{2}$, ta có tiếp tuyến $y = -2x - 5 + 4\sqrt{2}$;

Ứng với $x_2 = -2 - \sqrt{2}$, ta có tiếp tuyến $y = -2x - 5 - 4\sqrt{2}$.

5.3. a) $y = \dfrac{4x-5}{x-1}$.

- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.



Hình 84

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$4 \nearrow$	$+\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	4

Các khoảng đồng biến là $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$:

Tiệm cận đứng $x = 1$

vì $\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$.

Tiệm cận ngang $y = 4$ vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 4$.

Giao với các trục toạ độ : $(0 ; 5)$ và $(\frac{5}{4} ; 0)$.

Đồ thị như trên Hình 84.

b) Ta có $y'(2) = 1$. Phương trình tiếp tuyến là $y = x + 1$.

Diện tích của miền cần tìm là

$$S = \int_2^4 \left(x + 1 - 4 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \int_2^4 \left(x - 3 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \ln 3.$$

5.4. a) Tiệm cận đứng : $x = 2$; Tiệm cận ngang : $y = -5$.

b) Tiệm cận đứng : $x = 1$; Tiệm cận ngang : $y = -6$.

c) Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 + 8x - 9}{3x^2 + x - 4} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2\left(2 + \frac{8}{x} - \frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = \frac{2}{3}$.

Ta có $y = \frac{2x^2 + 8x + 9}{(x-1)(3x+4)}$.

Từ đó đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -\frac{4}{3}$.

d) Tiệm cận đứng : $x = \frac{5}{2}$. Tiệm cận ngang : $y = -\frac{1}{2}$.

5.5. a) $y' = -3x^2 - 12x + 15$; $y'' = -6x - 12$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5. \end{array}\right.$

$y''(1) = -18 < 0$; $y''(-5) = 18 > 0$.

Vậy với $x = -5$ hàm số đạt cực tiểu và $y_{CT} = -99$.

Với $x = 1$ hàm số đạt cực đại và $y_{CĐ} = 9$.

b) Tập xác định $D =$ ¡ . Hàm số có cực tiểu khi $x = 0$, $y_{CT} = 0$.

c) Tập xác định : $x > -1$; $y' = 1 + \frac{1}{x+1}$; $y' > 0, \forall x > -1$.

Hàm số luôn đồng biến nên không có cực trị.

d) Tập xác định : ¡ $\setminus \{-1\}$; $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \text{ ; } y''(0) = 2 > 0 \text{ ; } y''(-2) = -2 < 0.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CĐ} = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = 0$.

5.6. Tập xác định : $D =$ ¡ ; $y' = x^2 - (1 + 2\cos a)x + 2\cos a$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2\cos a. \end{array}\right.$

Vì $y' > 0$ ở ngoài khoảng nghiệm nên để hàm số đồng biến với mọi $x > 1$ thì

$$2\cos a \le 1 \Leftrightarrow \cos a \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le a \le \frac{5\pi}{3} \text{ (vì } a \in (0 ; 2\pi)).$$

5.7. a) Xét hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \dfrac{x^2}{2}$, có tập xác định là ¡ .

$$f'(x) = e^x - \sin x - 1 + x \ ; \ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta lại có $f''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0$, $\forall x$ vì $1 - \cos x \geq 0$ và $e^x > 0$.

Như vậy, $f'(x)$ đồng biến trên ¡ . Từ đó : $f'(x) < f'(0) = 0, \forall x < 0$; $f'(x) > f'(0) = 0, \forall x > 0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		0		$\nearrow$

Hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \dfrac{x^2}{2} \geq f_{CT} = f(0) = 0, \ \forall x \in$ ¡ .

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) $\forall x \geq 0$ xét hàm số $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, ta có

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}};$$

Từ đó $f'(x) > 0$ với mọi $x > 0 \left(\text{vì } e^x + e^{-x} > 2 \text{ và } \dfrac{2}{\sqrt{1 + x^2}} < 2 \right)$

và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $[0 \ ; +\infty)$, tức là

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - e^0 - 2\ln 1 = 0.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

c) Xét hàm số $f(x) = 8\sin^2 \dfrac{x}{2} + \sin 2x - 2x$, $\forall x \in (0 \ ; \pi]$.

$$f'(x) = 4\sin x + 2\cos 2x - 2 = 4\sin x(1 - \sin x).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \pi \end{array}\right..$$

Với $x \in (0 \ ; \pi]$ ta có $f'(x) \geq 0$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hai điểm.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $(0 \ ; \pi]$. Mặt khác, $f(0) = 0$ nên $f(x) > 0$.
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

5.8. a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ trên đoạn $[-5 ; 5]$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 72 ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -6 \notin [-5 ; 5]. \end{array}\right.$$

$$f(-5) = 400 ;\ f(5) = -70 \ ;\ f(4) = -86.$$

Ngoài ra, $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5 ; 5]$ và $f(-5).f(5) < 0$ nên tồn tại $x_0 \in (-5 ; 5)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Ta có $g(x) = |f(x)| \geq 0$ và $g(x_0) = |f(x_0)| = 0$; $g(-5) = |400| = 400$; $g(5) = |-70| = 70$; $g(4) = |f(4)| = |-86| = 86$.

Vậy $\min\limits_{[-5;5]} g(x) = g(x_0) = 0$; $\max\limits_{[-5;5]} g(x) = g(-5) = 400$.

b) $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(\sqrt{2}) = -3$; $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = f(0) = 1$.

c) $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = 4$. Không có giá trị lớn nhất.

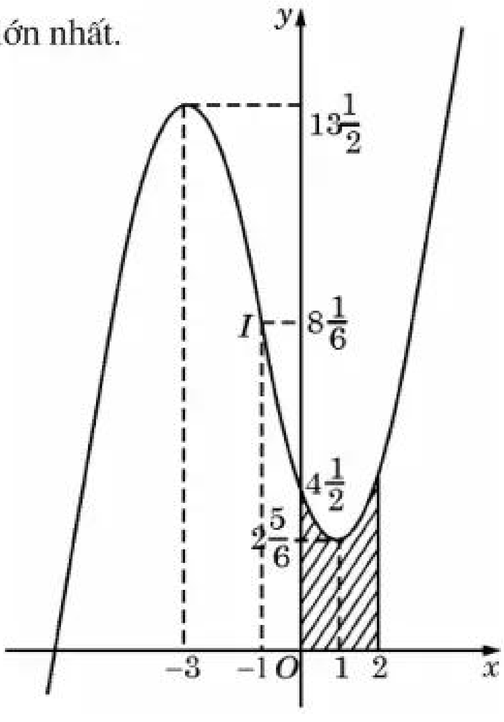
5.9. a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4\dfrac{1}{2}$.

- Tập xác định : $D =$ ¡ .
- Sự biến thiên : $y' = x^2 + 2x - 3$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$13\frac{1}{2}$	↘	$2\frac{5}{6}$	↗	$+\infty$



Hình 85

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty ; -3)$ và $(1 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-3 ; 1)$.

• Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$; $y_{CĐ} = 13\frac{1}{2}$ và $y_{CT} = 2\frac{5}{6}$ khi $x = 1$.

• Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0 ; 4\frac{1}{2}\right)$ và có dạng như trên Hình 85.

$y'' = 2x + 2$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy $I\left(-1 ; 8\frac{1}{6}\right)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Tiếp tuyến với (C) đi qua $A\left(0 ; 4\frac{1}{2}\right)$ có phương trình là

$$y = f'(0)x + 4\frac{1}{2}, \text{ trong đó } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}.$$

Ta có $f'(0) = -3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 4\frac{1}{2}$.

c) $S = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = 7$ (đơn vị diện tích).

d) Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -3x + 4\frac{1}{2}$ với đồ thị của (1) thoả mãn phương trình

$$\frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m-3)x + 4\frac{1}{2} = -3x + 4\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + mx = 0 \Leftrightarrow x\left[x^2 - 3(m-1)x + 3m\right] = 0$.

Để (2) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình

$$f(x) = x^2 - 3(m-1)x + 3m = 0$$

phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là

$$\begin{cases} f(0) = 3m \neq 0 \\ \Delta = 9(m-1)^2 - 12m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{3} \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{3},\ m \neq 0 \\ m > 3. \end{array}\right.$$

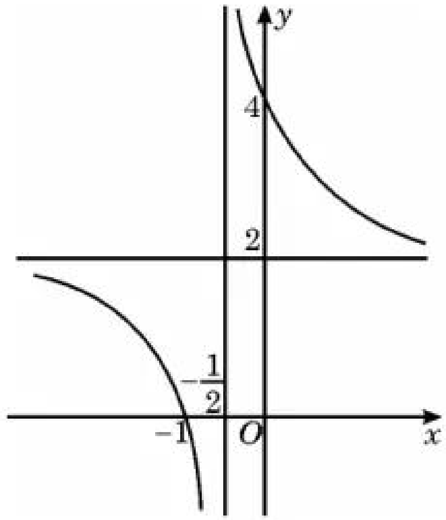
5.10. a) $y = \frac{4x+4}{2x+1}$.

Tập xác định : $D = ¡ \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có $y' = -\frac{4}{(2x+1)^2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2



Hình 86

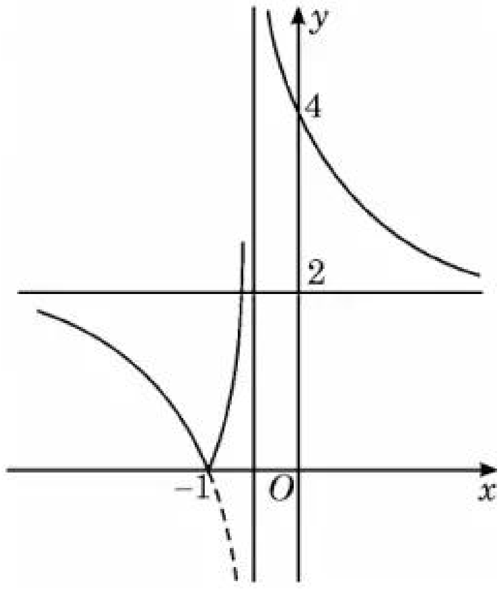
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty\ ;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}\ ;+\infty\right)$.

Tiệm cận đứng : $x=-\frac{1}{2}$; Tiệm cận ngang : $y=2$.

Giao với các trục toạ độ : $(0\ ;\ 4)$ và $(-1\ ;\ 0)$.

Đồ thị như trên Hình 86.

b) Đồ thị của hàm số được suy ra từ (C) bằng cách giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành (H.87).



Hình 87

c) Tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-\frac{1}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm phải thoả mãn phương trình $-\frac{4}{(2x+1)^2}=-\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{5}{2} \\ x=\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Hai tiếp tuyến cần tìm là $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{8}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{23}{8}$.

5.11. a) Với $m = 2$, ta có $y = \dfrac{4x+1}{x+1}$.

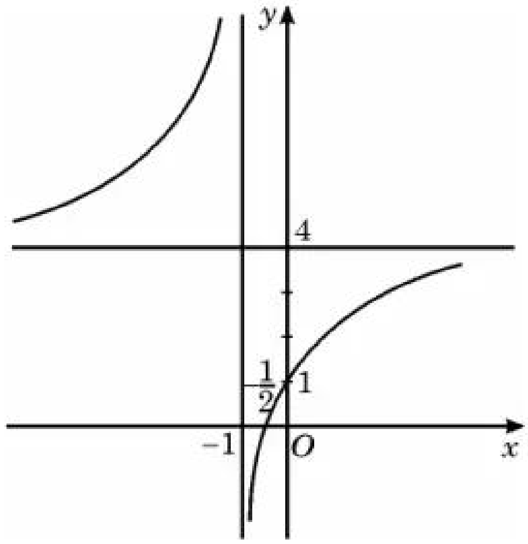
Học sinh tự khảo sát (H.88).

b) Ta có $y = 2 + m - \dfrac{3}{x+1}$.

Vậy để y nguyên với x và m nguyên thì $x + 1$ phải là ước của 3, tức là

$x + 1 = \pm 1$ hoặc $x + 1 = \pm 3$ hay $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = -4$; $x_4 = 2$.

Vậy các điểm thuộc đồ thị của (1) có toạ độ nguyên là $A(0 ; m-1)$; $B(-2 ; 5+m)$; $C(-4 ; 3+m)$; $D(2 ; m+1)$.



Hình 88

5.12. Do a, b, x là những số dương nên ta có :

a) $A_1 = \left[\dfrac{2a + (ab)^{\frac{1}{2}}}{3a}\right]^{-1} = \dfrac{3a}{2a + (ab)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3a^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$;

$$A_2 = \left[\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a - (ab)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right] = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + (ab)^{\frac{1}{2}} + b\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)} - \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{a + (ab)^{\frac{1}{2}} + b - a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Vậy $A = A_1.A_2 = \dfrac{3a^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} . \dfrac{b^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}} = 3\sqrt{b}$.

b) $B_1 = \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2} = \dfrac{(a+x)\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2}{4ax}$.

$B_2 = \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2} = \dfrac{(a+x)\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}{4ax}$.

Vậy $B = B_1 - B_2 = \dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}$.

c) Ta có $16^{\frac{1}{\log_7 4}} = 4^{2\log_4 7} = 49$; $81^{\frac{1}{\log_6 9}} = 36$

$\Rightarrow C = \sqrt{49 + 36 + 15} = 10.$

d) Ta có $49^{1-\log_7 2} = \dfrac{49}{49^{\log_7 2}} = \dfrac{49}{4}$; $5^{-\log_5 4} = \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow D = \dfrac{49}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{2}$.

5.13. Với a dương và khác 1, ta có :

a) $c^2(x) - s^2(x) = \left(\dfrac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{a^{2x} + a^{-2x} + 2 - a^{2x} - a^{-2x} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1. \quad \square$$

d) $t(2x) = \dfrac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^{2x} + a^{-2x}}$. Mặt khác, ta có

$$1 + t^2(x) = 1 + \left(\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}\right)^2 = \frac{2\left(a^{2x} + a^{-2x}\right)}{a^{2x} + a^{-2x} + 2}.$$

Ta biến đổi vế phải $\dfrac{2t(x)}{1 + t^2(x)} = 2\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} \cdot \dfrac{a^{2x} + a^{-2x} + 2}{2\left(a^{2x} + a^{-2x}\right)} =$

$$= \frac{2\left(a^x - a^{-x}\right)\left(a^x + a^{-x}\right)^2}{2\left(a^x + a^{-x}\right)\left(a^{2x} + a^{-2x}\right)} = \frac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^{2x} + a^{-2x}}. \quad \square$$

Các câu b), c) học sinh tự chứng minh.

5.14. a) Ta có $\log_{30} 8 = \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3.\log_{30} \dfrac{30}{15}$

$$= 3\left(\log_{30} 30 - \log_{30}(3.5)\right) = 3\left(1 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5\right) = 3(1 - a - b).$$

b) Chuyển sang cơ số 10. Sau khi biến đổi, ta được $\log_9 20 = \dfrac{1 + a}{2b}$.

5.15. a) Phương trình đã cho tương đương với $\left(\dfrac{13}{24}\right)^{3x+7} = \left(\dfrac{13}{24}\right)^{-(2x+3)}$

$$\Leftrightarrow 3x + 7 = -2x - 3 \Leftrightarrow x = -2.$$

b) Vì $\left(4 - \sqrt{15}\right)\left(4 + \sqrt{15}\right) = 1$ nên ta đặt $\left(4 - \sqrt{15}\right)^{\tan x} = t \; (t > 0)$,

ta được phương trình $t^2 - 8t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 + \sqrt{15} \\ t = 4 - \sqrt{15}. \end{array}\right.$$

• Ứng với $t = 4 - \sqrt{15}$, ta có $(4 - \sqrt{15})^{\tan x} = 4 - \sqrt{15}$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in ¢.$$

• Ứng với $t = 4 + \sqrt{15}$, ta có $(4 - \sqrt{15})^{\tan x} = 4 + \sqrt{15} = (4 - \sqrt{15})^{-1}$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in ¢.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in ¢$.

c) Ta nhận thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình. Mặt khác, hàm số

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{6 + \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{7 - \sqrt{15}}\right)^x$$

là tổng của hai hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 (hai hàm số đồng biến) nên $f(x)$ đồng biến trên ¡ . Do đó, $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

5.16. a) Vì $1 = 5^0$ nên ta có $5^{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} = 1 \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}\ (k \in ¢).$$

b) $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$. (1)

Vì $4^x, 6^x, 9^x$ đều khác 0 với mọi $x \in$ ¡ nên chia cả hai vế của phương trình (1) cho 4^x hoặc 6^x hoặc 9^x, ta được phương trình tương đương.

Chia cả hai vế cho 6^x, ta có $(1) \Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^x - 13 + 6.\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0.$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t\ (t > 0)$, ta có

$$6t - 13 + \frac{6}{t} = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

• Với $t = \frac{2}{3}$ ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1.$

• Với $t = \frac{3}{2}$ ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -1.$

c) Lôgarit hoá hai vế theo cơ số 7, ta được

$$x^2 + 2x.\log_7 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\log_7 5 - \sqrt{\log_7^2 5 + 1} \\ x = -\log_7 5 + \sqrt{\log_7^2 5 + 1}. \end{array}\right.$$

d) $\log_4(x+2).\log_x 2 = 1$. (1)

Điều kiện : $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(x+2).\dfrac{1}{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2(x+2) = \log_2 x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

e) Điều kiện : $x > 0$.

Đổi sang cơ số 3 và đặt $\log_3 x = t$, ta được phương trình

$$\frac{t}{1+t} = \frac{2(2+t)}{3(3+t)}.$$

Giải phương trình ẩn t, ta được $t_1 = 1$, $t_2 = -4$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3$; $x_2 = \dfrac{1}{81}$.

g) Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Đặt $\log_3 x + \log_4(2x-2) = f(x)$.

Dễ thấy $f(x)$ là hàm số đồng biến. Mặt khác $f(3) = 2$ nên ta có

$$f(x) > f(3) = 2 \text{ với } x > 3 \text{ và } f(x) < f(3) = 2 \text{ với } 1 < x < 3.$$

Từ đó suy ra $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

5.17. a) Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

Vì $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ và $1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ nên ta có

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+1)} < 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 1.$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3. \end{array}\right.$$

b) Ta có bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 3.3^{\sqrt{x}} + x.3^{\sqrt{x}} - 2x^2.3^{\sqrt{x}} - 2x - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3 + x - 2x^2\right)3^{\sqrt{x}} - 2\left(x - 2x^2 + 3\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-2x^2 + x + 3\right)\left(3^{\sqrt{x}} - 2\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 < 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 < 0 \\ x \geq 0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_3^2 2 \\ x \geq 0 \\ -1 < x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < \log_3^2 2 \left(\text{vì } \log_3^2 2 < 1 < \dfrac{3}{2}\right).$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_3^2 2 \\ x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $0 \leq x < \log_3^2 2$ hoặc $x > \dfrac{3}{2}$.

c) Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \dfrac{5-12x}{12x-8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{12} < x < \dfrac{2}{3}$. (*)

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{\log_2 x}.\log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geq 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \leq \log_2 x$$

$\left(\text{vì khi } x \in \left(\dfrac{5}{12}\,;\dfrac{2}{3}\right) \text{ thì } \log_2 x < 0\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{5-12x}{12x-8} - x \le 0 \Leftrightarrow \frac{(6x+5)(1-2x)}{12x-8} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6} \le x \le \frac{1}{2} \\ x > \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta có $\frac{5}{12} < x \le \frac{1}{2}$.

5.18. a) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \ge \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x}{x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \frac{1}{4} \\ x < 0. \end{array}\right.$$

b) Điều kiện : $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2. \end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{0,2}\left(x^2 - 4\right) \ge \log_{0,2} 0,2^{-1} = \log_{0,2} 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \le 5 \text{ (vì } 0,2 < 1) \Leftrightarrow x^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $\left[\begin{array}{l} 2 < x \le 3 \\ -3 \le x < -2. \end{array}\right.$

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$0 < \log_{0,5}\left(2^x - \frac{15}{16}\right) \le 4$$

$$\Leftrightarrow 1 > 2^x - \frac{15}{16} \ge 0,5^4 \Leftrightarrow \frac{31}{16} > 2^x \ge 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{31}{16} > x \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \le x < \log_2 31 - 4.$$

Ở đây, chúng ta đã áp dụng tính đồng biến và nghịch biến của các hàm số lôgarit và hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 1.

d) Bất phương trình đã cho tương đương với $0 < 16^x - 2.12^x \le 3^{2x+1}$

$$\Leftrightarrow 0 < 4^x.4^x - 2.4^x.3^x \le 3^x.3^x.3$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^{x} \le 3. \qquad (1)$$

(Ta đã chia cả hai vế cho 9^x ($9^x > 0$)).

Đặt $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$ $(t > 0)$, ta có hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} t^2 - 2t \le 3 \\ t^2 - 2t > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2t - 3 \le 0 \\ t^2 - 2t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ -1 \le t \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2 < t \le 3$$

Từ đó, ta có $2 < \left(\frac{4}{3}\right)^x \le 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{4}{3}} 2 < x \le \log_{\frac{4}{3}} 3$.

5.19. a) Đổi biến $t = x + 3 \Rightarrow x - 2 = t - 5$. Khi $x = -2$ thì $t = 1$, khi $x = 4$ thì $t = 7$, ta có

$$\int_{-2}^{4} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{1}^{7} \left(1 - \frac{10}{t} + \frac{25}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \left(t - 10\ln t - \frac{25}{t}\right)\Big|_1^7 = 27\frac{3}{7} - 10\ln 7.$$

b) $\displaystyle\int_{-4}^{6} (|x+3| - |x-4|)\,\mathrm{d}x = -7\int_{-4}^{-3} \mathrm{d}x + \int_{-3}^{4} (2x-1)\mathrm{d}x + \int_{4}^{6} 7\mathrm{d}x = 7$.

c) Đổi biến $t = \sqrt{x+7}$, ta có $I = \displaystyle\int_{2}^{3} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t+3} = 2 - 6\ln 1{,}2$.

d) Đổi biến $t = 1 + 4\sin x$, ta có $I = \displaystyle\frac{1}{4}\int_{1}^{5} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{4}\ln 5$.

e) Đổi biến $t = x^5$.

$$I = \frac{1}{5}\int_{1}^{32} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2 + 4t + 4} = \frac{1}{5}\int_{1}^{32} \frac{(t+2-2)\,\mathrm{d}t}{(t+2)^2} = \frac{1}{5}\int_{1}^{32} \left[\frac{1}{t+2} - \frac{2}{(t+2)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln(t+2) + \frac{2}{t+2}\right]\Big|_1^{32} = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{34}{3} - \frac{31}{51}\right).$$

g) Đặt $u = x + 2$, $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Ta có $I = \displaystyle\frac{1}{2}(x+2)e^{2x}\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(5e^6 - 2) - \frac{1}{4}(e^6 - 1) = \frac{3}{4}(3e^6 - 1)$.

h) Đổi biến $t = \sqrt{4+x}$.

$$I = 2\int_{\sqrt{6}}^{3}\left(1 + \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$= 2\left(t + \ln\frac{t-2}{t+2}\right)\Bigg|_{\sqrt{6}}^{3} = 2\left[3 - \sqrt{6} - \ln\left(25 - 10\sqrt{6}\right)\right].$$

5.20. a) *Đáp số* : $13\frac{1}{2} + 2\left(e - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; b) *Đáp số* : $\frac{7\sqrt{2}}{3} - 5\frac{5}{8} + \sin 2 - \sin\frac{1}{2}$;

c) *Đáp số* : $\sqrt{7} - \sqrt{5}$;

d) *HD* : Đổi biến $t = \sqrt[3]{3x^3 + 4}$

$\Rightarrow t^3 = 3x^3 + 4 \Rightarrow 3t^2dt = 9x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}t^2dt$.

Ta có $\int_1^2 \sqrt[3]{3x^3+4}\,x^2dx = \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{28}} t^3dt = \frac{1}{12}t^4\Big|_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{28}} = \frac{7\sqrt[3]{7}\left(4\sqrt[3]{4} - 1\right)}{12}$.

e) $\int_{-2}^{2}(x-2)\,|\,x\,|\,dx = \int_{-2}^{0}(2x - x^2)dx + \int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -\frac{20}{3} - \frac{4}{3} = -8.$

g) $\int_1^0 x\cos x dx = x\sin x\Big|_1^0 - \int_1^0 \sin x dx = -\sin 1 + \cos x\Big|_1^0 = 1 - (\sin 1 + \cos 1)$.

h) Ta có $1 + \sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1$

$= 2\cos x(\sin x + \cos x)$.

Từ đó, ta có đáp số là 1.

i) Áp dụng phương pháp tính tích phân từng phần hai lần, cả hai lần đều đặt $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$. Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx\right] = e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I \Rightarrow I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$$

k) Lấy tích phân theo phương pháp tính tích phân từng phần hai lần : lần thứ nhất đặt $u = \ln^2 x$, lần thứ hai đặt $u = \ln x$ và có đáp số là $\frac{1}{27}(5e^3 - 2)$.

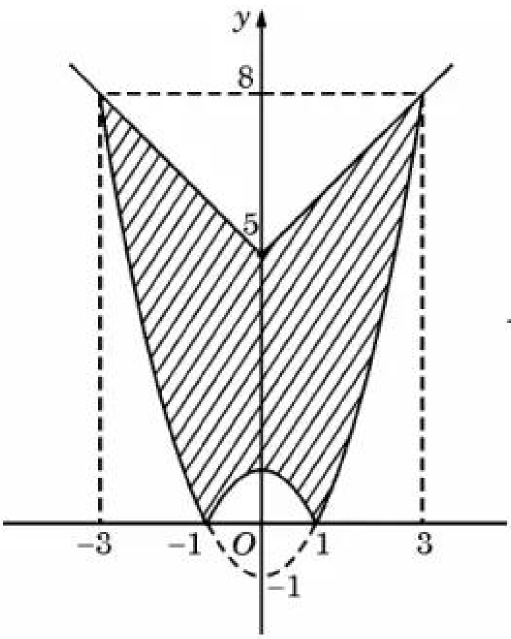
5.21. a) Hai hàm số $y = |x^2 - 1|$ và $y = 5 + |x|$ đều là hàm số chẵn. Miền cần tính diện tích được thể hiện ở Hình 89. Do tính đối xứng qua trục tung, ta có

$$S = 2\int_0^3 \left(5 + |x| - |x^2 - 1|\right) \mathrm{d}x$$

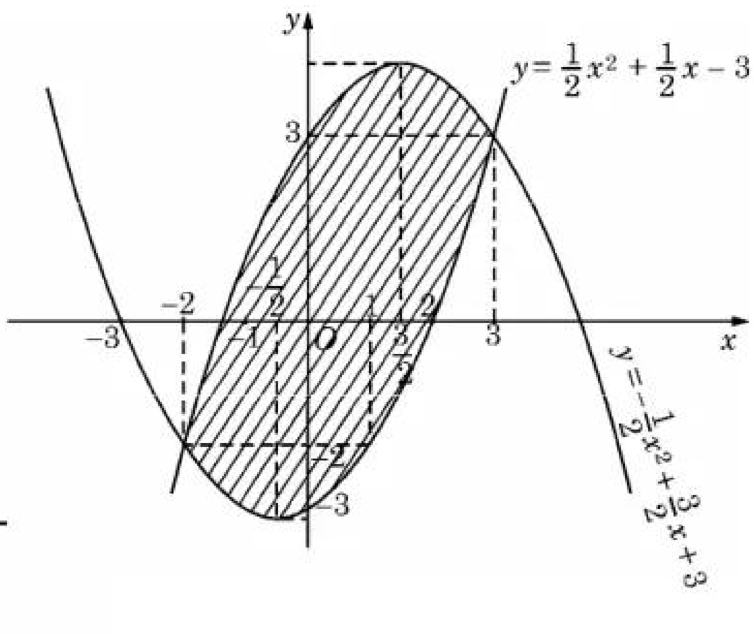
$$= 2\left[\int_0^1 (5 + x - 1 + x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 (5 + x - x^2 + 1)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right)\Bigg|_1^3\right]$$

$$= 24\frac{1}{3} \text{ (đơn vị diện tích).}$$



Hình 89



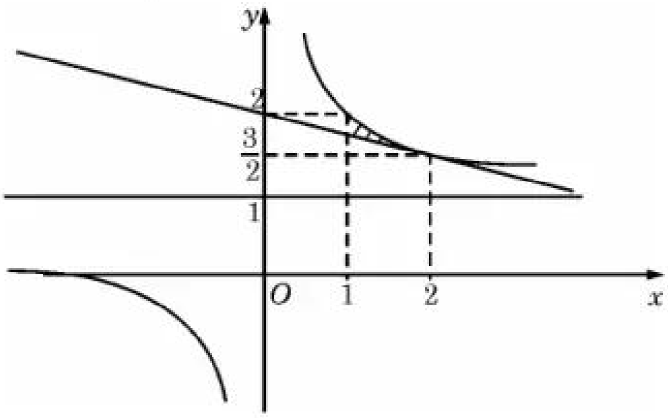
Hình 90

b) Miền cần tính diện tích được thể hiện bởi Hình 90 (học sinh tự làm). Như vậy, với mọi $x \in (-2\,;\,3)$ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ nằm phía trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$.

Vậy ta có $S = \int_{-2}^{3}\left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right)\right]dx$

$$= \int_{-2}^{3}\left(-x^2 + x + 6\right)dx = 20\frac{5}{6} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

c) Trên Hình 91 thể hiện miền cần tính diện tích (học sinh tự vẽ).



Hình 91

$$S = \int_{1}^{2}\left[\frac{1}{x} + 1 - \left(-\frac{1}{4}x + 2\right)\right]dx$$

$$= \int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x - 1\right)dx$$

$$= \ln 2 - \frac{5}{8} \text{ (đơn vị diện tích)}$$

(vì tiếp tuyến với đồ thị của $y = \frac{1}{x} + 1$ tại điểm $\left(2 ; \frac{3}{2}\right)$

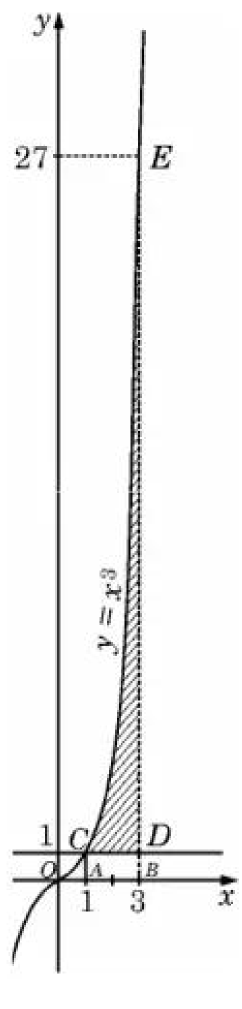
có phương trình là $y = f'(2)(x-2) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x + 2$).

5.22. a) (H.92) Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi miền *CED* quay quanh trục *Ox* là hiệu của hai thể tích (V_1 và V_2) của hai vật thể tròn xoay tương ứng sinh ra khi miền *ACEB* và miền *ACDB* quay quanh trục *Ox*. Như vậy $V = V_1 - V_2$, trong đó

$$V_1 = \pi\int_{1}^{3} x^6 dx = \frac{1}{7}\pi x^7\Big|_1^3 = \frac{\pi}{7}\left(3^7 - 1\right);$$

$$V_2 = \pi\int_{1}^{3} dx = 2\pi. \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{7}\left(3^7 - 15\right)$$

$$= 310\frac{2}{7}\pi \text{ (đơn vị thể tích).}$$



Hình 92

b) (H.93) Ta có $V = V_1 - V_2$,

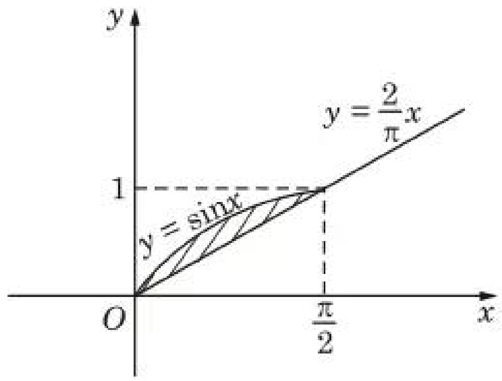
trong đó

$$V_1 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4};$$

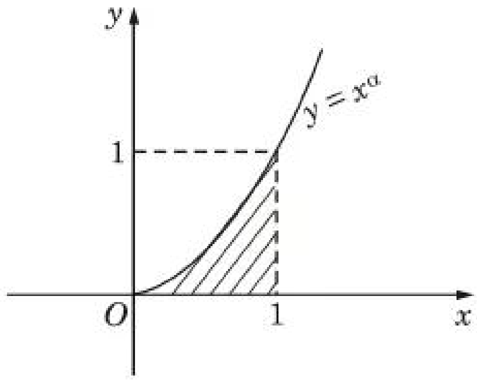
$$V_2 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}x\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6};$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^2}{12} \text{ (đơn vị thể tích).}$$

c) $V = \pi\int_0^1 x^{2\alpha}dx = \dfrac{\pi}{2\alpha + 1}$.



Hình 93



Hình 94

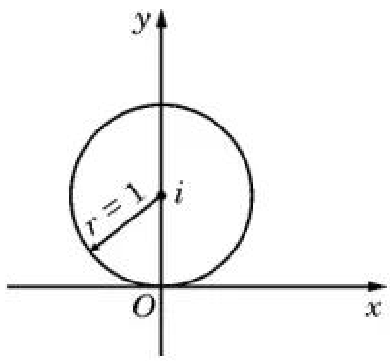
5.23. a) Biến đổi vế trái bằng cách nhóm từng bốn số hạng và đặt thừa số chung, ta được

$$i(1+i+i^2+i^3)+...+i^{97}(1+i+i^2+i^3)=(1+i+i^2+i^3)(i+...+i^{97})=0,$$

vì $1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$. □

b) Ta có $\dfrac{(\sqrt{2}+i)(1-i)(1+i)}{i} = \dfrac{2(\sqrt{2}+i)i}{-1} = -(2\sqrt{2}i + 2i^2) = 2 - 2\sqrt{2}i$. □

5.24. a) Vế trái là khoảng cách từ điểm biểu diễn z đến điểm biểu diễn $z_0 = 0 + i$. Vậy tập hợp các điểm thoả mãn điều kiện đã cho là tất cả các điểm cách điểm $(0 ; 1)$ một khoảng không đổi bằng 1. Đó là các điểm nằm trên đường tròn bán kính bằng 1 và tâm là điểm $(0 ; 1)$ (H.95).



Hình 95

Ta có thể tiến hành như sau :

Cho $z = x + iy$, ta có $|z - i|^2 = |x + (y-1)i|^2 = x^2 + (y-1)^2$ và như vậy, ta có $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Đây là phương trình đường tròn bán kính bằng 1 và tâm là $(0 ; 1)$.

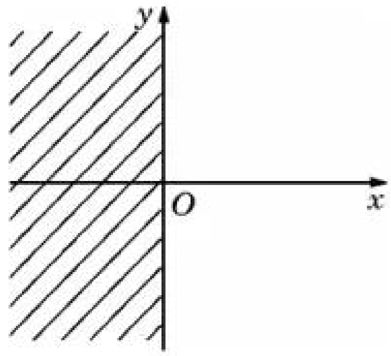
b) (H.96) Ta có : $|2+z|^2 < |2-z|^2$

$\Leftrightarrow |(2+x)+iy|^2 < |(2-x)-iy|^2$

$\Leftrightarrow (2+x)^2 + y^2 < (2-x)^2 + (-y)^2$

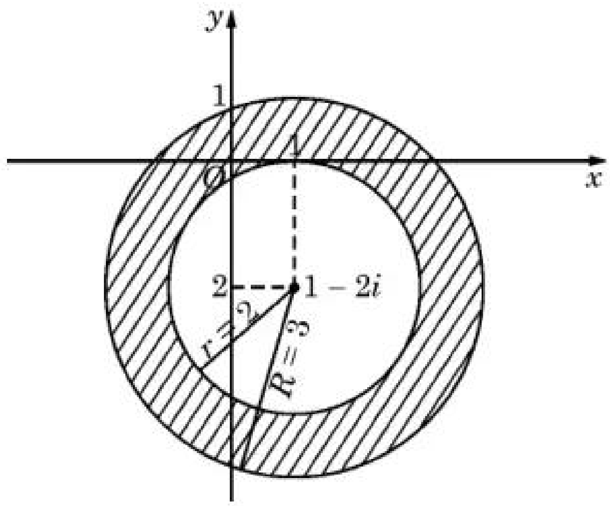
$\Leftrightarrow x < 0.$

Đó là tập hợp các số phức có phần thực nhỏ hơn 0, tức là nửa trái của mặt phẳng toạ độ không kể trục Oy.



Hình 96

c) Đó là những điểm nằm phía trong hình tròn bán kính bằng 3 và phía ngoài (kể cả biên) hình tròn bán kính bằng 2 có cùng tâm là điểm biểu diễn số phức $z_0 = 1 - 2i$, tức là những điểm nằm trong hình vành khăn kể cả biên trong (H.97). Đó là những điểm $(x\,;\,y)$ trên mặt phẳng toạ độ thoả mãn điều kiện $4 \le (x-1)^2 + (y+2)^2 < 9$.



Hình 97

5.25. a) $\dfrac{5+2i}{7-i} = \dfrac{(5+2i)(7+i)}{50} = \dfrac{33}{50} + \dfrac{19}{50}i.$

b) $\dfrac{3-i}{i} + (5-i)^2 = -1 - 3i + (25 - 10i - 1) = 23 - 13i.$

5.26. a) $z = \dfrac{-1+6i}{-6(2-7i)} = \dfrac{1-6i}{6(2-7i)} = \dfrac{(1-6i)(2+7i)}{6.53} = \dfrac{44-5i}{318}.$

b) $z = i$.

5.27. a) $x_1 = \dfrac{2+i\sqrt{2}}{3}$; $\quad x_2 = \dfrac{2-i\sqrt{2}}{3}$. $\qquad$ b) $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{35}i}{2}$; $\quad x_2 = \dfrac{1-\sqrt{35}i}{2}$.

5.28. Hệ phương trình tương ứng với

$$\begin{cases} 3x + 6y = 3 + 3i \\ 3x + iy = 2 - 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 + i \\ (6-i)y = 1 + 6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - i \\ y = i. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(1 - i\,;\,i)$.

5.29. $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$; $z_2 = 8y^2 - 20i$. Để $z_1 = \overline{z_2}$, ta có

$$\begin{cases} 9y^2 - 4 = 8y^2 \\ -10x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

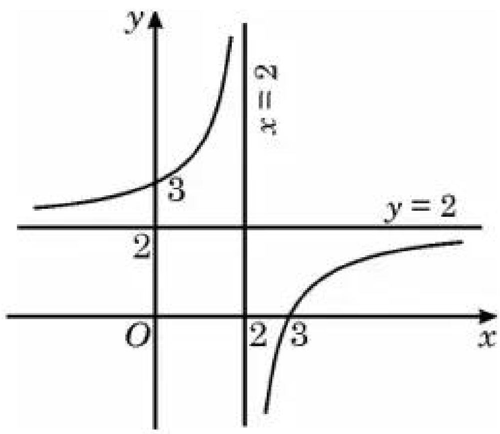
Vậy có hai cặp $(x ; y)$ là $(-2 ; 2)$ và $(-2 ; -2)$.

5.30. a) $|z_1| = \sqrt{(-8)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{257}}{2}$; b) $|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{10}$.

Đề tự kiểm tra

Đề 1

Câu I. 1) Học sinh tự giải (H. 98).



Hình 98

2) Đồ thị của (1) được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành (H.99).

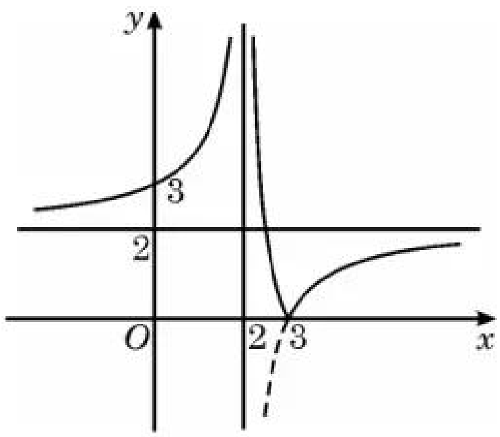
Số nghiệm của (2) là số giao điểm của đồ thị của (1) với đường thẳng $y = \log_2 k$.

Dựa trên đồ thị, ta suy ra :

* Phương trình (2) vô nghiệm nếu $-\infty < \log_2 k < 0 \Leftrightarrow 0 < k < 1$.

* Phương trình (2) có một nghiệm nếu $\log_2 k = 0$ hoặc $\log_2 k = 2$, tức là khi $k = 1$ hoặc $k = 4$.

* Phương trình (2) có hai nghiệm nếu $0 < \log_2 k < 2$ hoặc $\log_2 k > 2$, tức là khi $1 < k < 4$ hoặc $k > 4$.



Hình 99

Kết luận : Phương trình vô nghiệm khi $0 < k < 1$;

Phương trình có một nghiệm khi $k = 0$ hoặc $k = 4$;

Phương trình có hai nghiệm khi $1 < k < 4$ hoặc $k > 4$.

3) Ta có $y = 2 - \dfrac{2}{x-2}$ nên y nguyên khi và chỉ khi $x - 2$ là ước của 2, tức là $x - 2 = \pm 1$ hoặc $x - 2 = \pm 2$. Từ đó, ta có các điểm có toạ độ nguyên là $(3\ ;\ 0)$; $(1\ ;\ 4)$; $(4\ ;\ 1)$ và $(0\ ;\ 3)$.

Câu II. 1) Vì $32 = 2^5$; $0,25 = \dfrac{1}{4} = 2^{-2}$; $128 = 2^7$, nên phương trình đã cho tương đương với :

$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{\frac{7(x+17)}{x-3} - 2} \Leftrightarrow \dfrac{5x+25}{x-7} = \dfrac{5x+125}{x-3} \Leftrightarrow x = 10$ (thoả mãn điều kiện $x \neq 7, x \neq 3$).

2) Điều kiện $\begin{cases} \cot x + \tan 3x > 0 \\ \tan 3x > 0. \end{cases}$

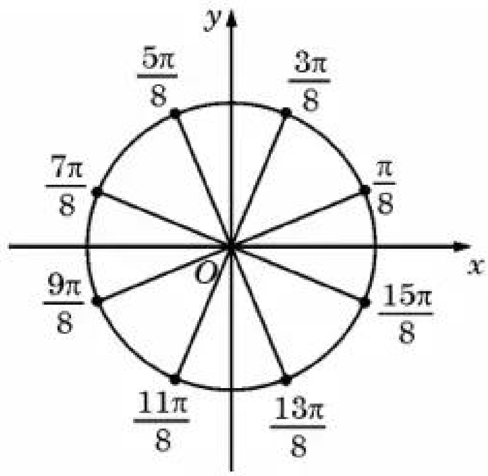
Phương trình đã cho tương đương với $\cot x + \tan 3x = 2\tan 3x$

$$\Leftrightarrow \cot x = \tan 3x. \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in ¢.$$

Để chọn những góc thoả mãn điều kiện, trước hết từ (*) suy ra $\cot x$ và $\tan 3x$ phải cùng dấu với nhau.

Lần lượt cho $k = 0, 1, 2, ..., 7$ (H.100), ta sẽ chọn được những góc không thoả mãn điều kiện. Khi đó, nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$ và $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi, k \in ¢$.



Hình 100

Câu III. a) Đổi biến :

$t = \sqrt{1 + 2x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2x^2$

$\Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 4x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \dfrac{t\mathrm{d}t}{2}$ và $x = 0$

$\Rightarrow t = 1$; $x = 2 \Rightarrow t = 3$.

Vậy $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + 2x^2}\, x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{6}t^3\Big|_1^3 = 4\frac{1}{3}$.

b) Áp dụng công thức $|z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$. *Đáp số* : $|z| = \dfrac{\sqrt{146}}{2}$.

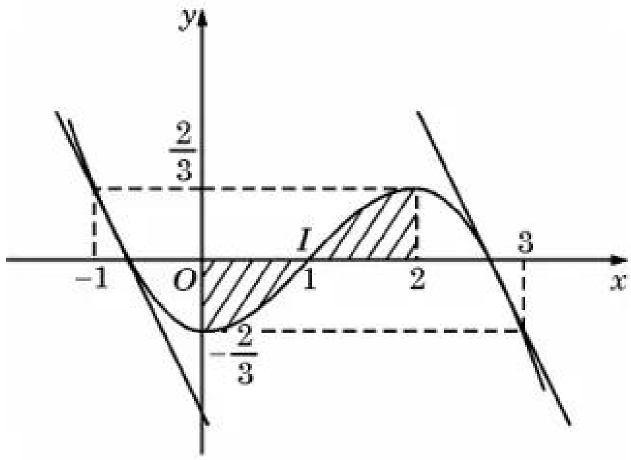
Đề 2

Câu I. 1) $y' = -x^2 + 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có $y' > 0$ với $x \in (0 ; 2)$ và $y' < 0$ khi x thuộc các khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$. Vậy với mọi m, đồ thị của hàm số luôn có điểm cực tiểu $(0 ; m-1)$ và điểm cực đại $\left(2 ; m+\frac{1}{3}\right)$. Một trong các điểm cực trị nằm trên trục Ox khi và chỉ khi hoặc

$m + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$

hoặc $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.



Hình 101

2) Với $m = \frac{1}{3}$, ta có $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$.

Học sinh tự giải (H.101).

3) Hệ số góc của tiếp tuyến là -3. Hoành độ tiếp điểm thoả mãn phương trình $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3. \end{array}\right.$$

Các tung độ của tiếp điểm tương ứng là $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = -\frac{2}{3}$.

Vậy ta có hai tiếp tuyến $y = -3x - \frac{7}{3}$ và $y = -3x + \frac{25}{3}$.

4) Vì $I(1 ; 0)$ là tâm đối xứng của (C) nên hình phẳng đã cho gồm hai hình đối xứng với nhau qua điểm I (H.101). Vậy

$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}\right)dx = \frac{5}{6} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Câu II. 1) Đặt $3^{\frac{x}{10}} = t$ $(t > 0)$, ta có

$$t^2 + \frac{t}{3} = 84 \Leftrightarrow 3t^2 + t - 252 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = -9\frac{1}{3} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Như vậy $3^{\frac{x}{10}} = 3^2 \Leftrightarrow x = 20$.

2) Điều kiện : $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3 - 2x > \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3-\sqrt{2}}{2} \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Câu III. 1) Đặt $t = \sqrt{x+1}$, suy ra $t^2 = x + 1$. Do đó, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$.
Khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = 3$ thì $t = 2$.

Vậy $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{(t+2).2t\,\mathrm{d}t}{t+3} = \int_1^2 \left(2t - 2 + \frac{6}{t+3}\right)\mathrm{d}t = 1 + 6\ln\frac{5}{4}$.

2) a) Giả sử $z = x + yi$. Ta có $|x + 1 + yi| = |x + (y-1)i|$

$\Leftrightarrow |(x+1) + yi|^2 = |x + (y-1)i|^2$

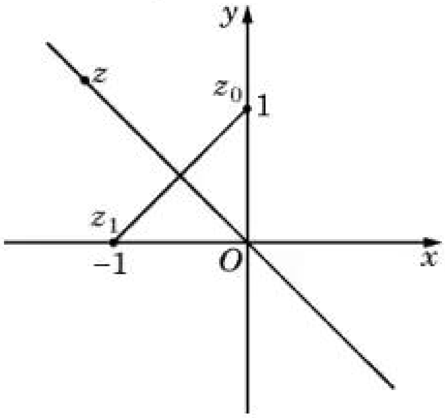
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 2x + y^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2y$

$\Leftrightarrow 2x = -2y \Leftrightarrow y = -x$.

Trên mặt phẳng tọa độ, đó là đường phân giác của góc phần tư thứ hai và thứ tư (H.102).

Cách 2 : Vế phải là khoảng cách từ điểm biểu diễn z tới điểm biểu diễn $z_0 = 0 + i$, vế trái là khoảng cách từ điểm biểu diễn z tới điểm biểu diễn $z_1 = (-1 + 0i)$. Vậy cần phải tìm các điểm cách đều hai điểm biểu diễn z_0 và z_1.



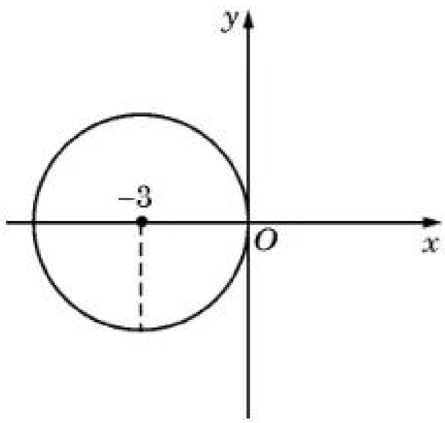
Hình 102

b) Ta có :

$|x + yi|^2 + 3(x + yi) + 3(x - yi) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 9$.

Trên mặt phẳng toạ độ, đó là tập hợp các điểm thuộc đường tròn bán kính bằng 3 và tâm là điểm $(-3\ ;\ 0)$ (H.103).



Hình 103

Đề 3

Câu I. 1) Học sinh tự giải (H.104).

2) Ta có $y'(1) = 0$. Vậy phương trình của tiếp tuyến là $y = 0$.

3) Dựa vào đồ thị (C) và đường thẳng $y = \log_3 m$, ta có :

* Khi $\log_3 m < -4$

$\Leftrightarrow m < \dfrac{1}{81}$, phương trình có một nghiệm

* Khi $\log_3 m = -4$

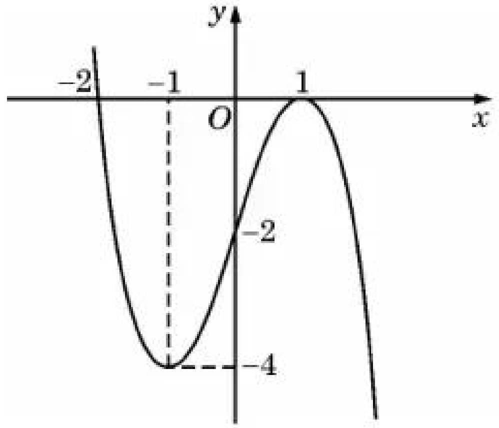
$\Leftrightarrow m = \dfrac{1}{81}$, phương trình có hai nghiệm

* Khi $0 > \log_3 m > -4$

$\Leftrightarrow 1 > m > \dfrac{1}{81}$, phương trình có ba nghiệm.

* Khi $\log_3 m = 0 \Leftrightarrow m = 1$, phương trình có hai nghiệm

* Khi $\log_3 m > 0 \Leftrightarrow m > 1$, phương trình có một nghiệm.



Hình 104

Kết luận :

* Phương trình có một nghiệm khi $m > 1$ hoặc $m < \dfrac{1}{81}$.

* Phương trình có hai nghiệm khi $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{1}{81}$.

* Phương trình có ba nghiệm khi $\dfrac{1}{81} < m < 1$.

Câu II. 1) $f(x)$ xác định trên ¡ $\setminus [-2\,;1]$ nên xác định trên đoạn $[3\,;6]$.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}.$$

Ta thấy $f'(x) > 0,\ \forall x \in [3\,;\,6]$ nên trên đoạn $[3\,;\,6]$ hàm số $f(x)$ đồng biến.

Vậy $\min\limits_{[3;6]} f(x) = f(3) = \ln 10$; $\max\limits_{[3;6]} f(x) = f(6) = \ln 40$.

2) Vì $f(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π, nên ta chỉ cần xét $f(x)$ trên đoạn $[0\,;\,2\pi]$.

$$f'(x) = -2\sin x\cos x - \sin x\,;\ f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = \left\{0\,;\,\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\,;\,\frac{4\pi}{3}\,;\,2\pi\right\}.$$

$$f(0) = f(2\pi) = 5\,;\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\frac{3}{4}\ ;\ f(\pi) = 3\,;\ f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\frac{3}{4}.$$

Vậy $\min\limits_{¡} f(x) = \min\limits_{[0;2\pi]} f(x) = 2\dfrac{3}{4}$, $\max\limits_{¡} f(x) = \max\limits_{[0;2\pi]} f(x) = 5$.

Câu III. 1) a) *Đáp số* : $\dfrac{7}{4}e^2 - \dfrac{3}{4}$.

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 7x + \cos x)dx = \frac{3}{7}.$

2) a) $z = (-4 + i\sqrt{48})(2+i)$ nên

$|z| = \left|-4 + i\sqrt{48}\right|\left|2+i\right| = \sqrt{(-4)^2 + (\sqrt{48})^2}\sqrt{2^2+1^2} = 8\sqrt{5}$.

b) $z = \dfrac{1+i}{2-i}$ nên $|z| = \dfrac{|1+i|}{|2-i|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.