Bài tập ôn chương III

3.25. a) $\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{3}{2}}(2x-1)+C$.

b) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$;

d) $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x-a}{2}}\right|+C$. *HD* : Ta có $\cos a=\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)$.

e) $-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C$.

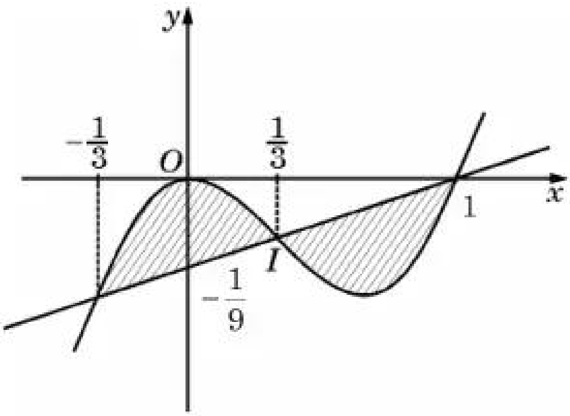
g) $\frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}x+C$.

3.26. a) $\frac{16}{105}$; b) $2\frac{49}{220}$; c) $\frac{4}{9}(2\sqrt{2}-1)$; d) 0 ;

e) $\frac{\pi}{8}$. *HD :* Dùng công thức hạ bậc đối với $\cos^3 x$.

3.27. a) $\frac{1}{2}$;

b) $\frac{8}{81}$; *HD* : Đường thẳng $y=\frac{1}{9}(x-1)$ đi qua tâm đối xứng $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{27}\right)$ của hàm số



Hình 77

$y = x^3 - x^2$. Do đó, hình phẳng giới hạn bởi hai đường đã cho gồm hai hình đối xứng nhau qua điểm I (H.77). Vậy

$$S = 2\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left[(x^3 - x^2) - \frac{1}{9}(x-1)\right]dx = 4\int_{0}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{9} - x^2\right)dx = \frac{8}{81}$$

(theo bài 3.14, $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(x^3 - \frac{1}{9}x\right)dx = 0$).

c) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$.

3.28. a) $\frac{\pi}{36}$. *HD :* Phương trình tiếp tuyến là $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$;

$$V = \pi\int_0^1 y^3 dy - \pi\int_{\frac{1}{3}}^{1} \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{9}\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right)^3\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{\pi}{36}.$$

b) $\pi\left(\frac{5}{3} - 2\ln 2\right)$;

c) $V_x = \frac{18}{5}\pi$ và $V_y = \frac{59}{6}\pi$;

HD :

$$V_y = \pi\left\{\int_0^1 \left[(1+\sqrt{1-y})^2 - (1-\sqrt{1-y})^2\right]dy + \int_0^3 \left[9 - (1+\sqrt{1+y})^2\right]dy\right\}$$

$$= \pi\left[\int_0^1 4\sqrt{1-y}\,dy + \int_0^3 (7-y-2)\sqrt{1+y}\,dy\right] = \frac{59\pi}{6}.$$

3.29. a) và b) đúng ; c) sai.

HD : b) Ta có : $\int_{-1}^{1} \frac{t^2 dt}{e^t + 1} = \int_{-1}^{0} \frac{t^2 dt}{e^t + 1} + \int_{0}^{1} \frac{t^2 dt}{e^t + 1}$; (*)

Dùng phương pháp đổi biến $t = -x$ đối với tích phân $\int\limits_{-1}^{0} \frac{t^2 \mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 1}$, ta được

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{t^2 \mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 1} = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \int\limits_{0}^{1} \frac{t^2 \mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{-t} + 1}.$$

Thay vào (*), ta có $\int\limits_{-1}^{1} \frac{t^2 \mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 1} = \int\limits_{0}^{1} t^2 \mathrm{d}t.$