Bài tập ôn chương IV

4.28. *Đáp số :*

a) 18 ; b) $\frac{3}{2}i\sqrt{2}$; c) $\frac{6}{5}(1+i)$.

4.29. *Đáp số :*

a) $1+4i\sqrt{3}$; b) $-11-2i$; c) $7-6i\sqrt{2}$; d) $2-11i$.

4.30. *Đáp số :*

a) $24i$; b) 2.

4.31. a) $(1+2i)x = -3-2i \Rightarrow x = -\frac{3+2i}{1+2i} = -\frac{7-4i}{5} = -\frac{7}{5}+\frac{4}{5}i.$

b) $(2-2i)x = -(11+3i) \Rightarrow x = -\frac{11+3i}{2(1-i)} = -2-\frac{7}{2}i.$

4.32. a) $3x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{6}$;

b) $-x^2+3x-4=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

4.33. a) Ta có $z\overline{z} = |z|^2$ nên từ $\overline{z} = z^3$ suy ra $|z|^2 = z^4$.

Đặt $z = a + bi$, suy ra

$$a^4 + b^4 - 6a^2b^2 + 4ab(a^2 - b^2)i = a^2 + b^2. \qquad (*)$$

Do đó, ta có $$4ab(a^2 - b^2) = 0 \qquad (**)$$

Từ (**) suy ra các trường hợp sau :

- $a = b = 0 \Rightarrow z = 0$.
- $a = 0, b \neq 0$: Thay vào (*), ta có $b^4 = b^2 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow z = \pm i$.
- $b = 0, a \neq 0$: Tương tự, ta có $a = \pm 1 \Rightarrow z = \pm 1$.
- $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2$, thay vào (*), ta có

  $2a^2(2a^2 + 1) = 0$, không có a nào thỏa mãn (vì $a \neq 0$).

b) Đặt $z = a + bi$. Từ $|z| + z = 3 + 4i$ suy ra

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 3 + 4i \Rightarrow b = 4 \text{ và } \sqrt{a^2 + 16} + a = 3.$$

$$\Rightarrow a^2 + 16 = (3 - a)^2 = 9 - 6a + a^2 \Rightarrow 6a = -7 \Rightarrow a = -\frac{7}{6}.$$

Vậy $z = -\frac{7}{6} + 4i$.

4.34. Đặt $z = x + yi$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1.$$

Vậy $z = 1 + i$.

4.35. Hiển nhiên nếu $z \in ¡$, $z \neq -1$ thì $\frac{z-1}{z+1} \in ¡$.

Ngược lại, nếu $\frac{z-1}{z+1} = a \in ¡$ thì $z - 1 = az + a$ và $a \neq 1$,

suy ra $(1 - a)z = a + 1 \Rightarrow z = \frac{a+1}{1-a} \in ¡$ và hiển nhiên $z \neq -1$.