

SỐ CẤP SỐ CỘNG

I – ĐỊNH NGHĨA



1

Biết bốn số hạng đầu của một dãy số là $-1, 3, 7, 11$.

Từ đó hãy chỉ ra một quy luật rồi viết tiếp năm số hạng của dãy theo quy luật đó.

ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d , ta có công thức truy hồi

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

Ví dụ 1. Chứng minh dãy số hữu hạn sau là một cấp số cộng :

$$1, -3, -7, -11, -15.$$

Giải. Vì $-3 = 1 + (-4)$; $-11 = -7 + (-4)$;

$$-7 = -3 + (-4); -15 = -11 + (-4)$$

nên theo định nghĩa, dãy số $1, -3, -7, -11, -15$ là một cấp số cộng với công sai $d = -4$. ■



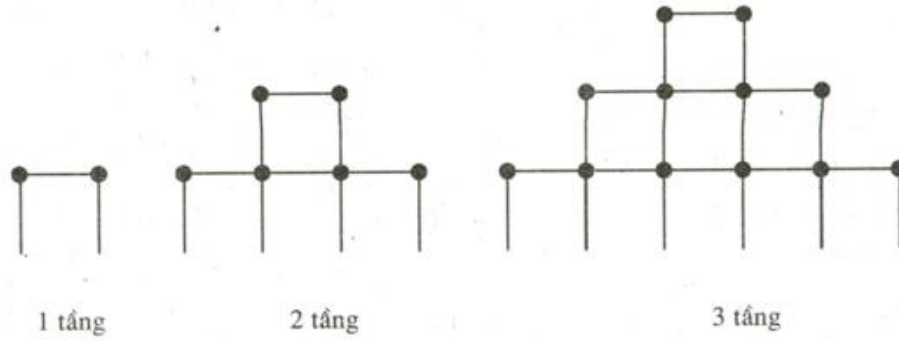
2

Cho (u_n) là một cấp số cộng có sáu số hạng với $u_1 = -\frac{1}{3}$, $d = 3$. Viết dạng khai triển của nó.

II – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT



3 Mai và Hùng chơi trò xếp các que diêm thành hình tháp trên mặt sân. Cách xếp được thể hiện trên Hình 42.



Hình 42

Hỏi : Nếu tháp có 100 tầng thì cần bao nhiêu que diêm để xếp tầng đế của tháp ?

ĐỊNH LÝ 1

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức :

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 2. \quad (2)$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh công thức (2) bằng quy nạp.

Khi $n = 2$ thì $u_2 = u_1 + d$, vậy công thức (2) đúng.

Giả sử công thức (2) đúng với $n = k \geq 2$, tức là $u_k = u_1 + (k - 1)d$.

Ta phải chứng minh rằng (2) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là $u_{k+1} = u_1 + kd$.

Thật vậy, theo định nghĩa cấp số cộng và giả thiết quy nạp ta có

$$u_{k+1} = u_k + d = [u_1 + (k - 1)d] + d = u_1 + kd.$$

Vậy $u_n = u_1 + (n - 1)d$ với $n \geq 2$. ■

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = -5$, $d = 3$.

a) Tìm u_{15} .

b) Số 100 là số hạng thứ bao nhiêu ?

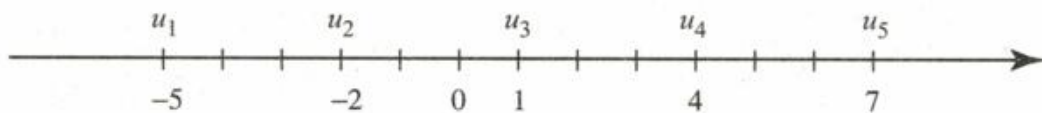
c) Biểu diễn các số hạng u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 trên trục số. Nhận xét vị trí của mỗi điểm u_2, u_3, u_4 so với hai điểm liền kề.

Giải. Cấp số cộng có $u_1 = -5, d = 3$.

a) Theo công thức (2) ta có $u_{15} = -5 + (15 - 1) \cdot 3 = 37$.

b) Theo công thức (2) ta có $u_n = -5 + (n - 1) \cdot 3$. Vì $u_n = 100$ nên
 $-5 + (n - 1) \cdot 3 = 100$, từ đó $n = 36$.

c) Năm số hạng của cấp số cộng là $-5, -2, 1, 4, 7$ được biểu diễn bởi các điểm u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 tương ứng trên Hình 43.



Hình 43

Điểm u_3 là trung điểm của đoạn u_2u_4 , hay $u_3 = \frac{u_2 + u_4}{2}$.

Ta cũng có kết quả tương tự đối với u_2 và u_4 . ■

Đây là một tính chất đặc trưng của cấp số cộng mà ta sẽ xét dưới đây.

III - TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

ĐỊNH LÝ 2

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2. \quad (3)$$

Chứng minh. Giả sử (u_n) là cấp số cộng với công sai d . Sử dụng công thức (1) với $k \geq 2$, ta có $u_{k-1} = u_k - d$; $u_{k+1} = u_k + d$.

Suy ra $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$ hay $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$. ■

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG



4

Cấp số cộng gồm tám số hạng $-1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27$ được viết vào bảng sau :

-1	3	7	11	15	19	23	27

a) Hãy chép lại bảng trên và viết các số hạng của cấp số đó vào dòng thứ hai theo thứ tự ngược lại. Nêu nhận xét về tổng của các số hạng ở mỗi cột.

b) Tính tổng các số hạng của cấp số cộng.

Ta công nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

Cho cấp số cộng (u_n) . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.

Khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}. \quad (4)$$

CHÚ Ý

Vì $u_n = u_1 + (n - 1)d$ nên công thức (4) có thể viết

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n - 1)}{2}d. \quad (4')$$

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n - 1$.

a) Chứng minh dãy (u_n) là cấp số cộng. Tìm u_1 và d .

b) Tính tổng của 50 số hạng đầu.

c) Biết $S_n = 260$, tìm n .

Giải

a) Vì $u_n = 3n - 1$ nên $u_1 = 2$.

Với $n \geq 1$, xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) - 1 - (3n - 1) = 3$, suy ra

$u_{n+1} = u_n + 3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$.

b) Vì $u_1 = 2, d = 3, n = 50$ nên theo công thức (4') ta có

$$S_{50} = 50.2 + \frac{50.49}{2}.3 = 3775.$$

c) Vì $u_1 = 2, d = 3, S_n = 260$ nên theo công thức (4') ta có

$$S_n = n.2 + \frac{n(n-1)}{2}.3 = 260 \text{ hay } 3n^2 + n - 520 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai trên với $n \in \mathbb{N}^*$, ta tìm được $n = 13$. ■

Bài tập

1. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 5 - 2n$;

b) $u_n = \frac{n}{2} - 1$;

c) $u_n = 3^n$;

d) $u_n = \frac{7-3n}{2}$.

2. Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau, biết:

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$

3. Trong các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp năm đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n .

a) Hãy viết các hệ thức liên hệ giữa các đại lượng đó. Cần phải biết ít nhất mấy đại lượng để có thể tìm được các đại lượng còn lại?

b) Lập bảng theo mẫu sau và điền số thích hợp vào ô trống:

u_1	d	u_n	n	S_n
-2		55	20	
	-4		15	120
3	$\frac{4}{27}$	7		
		17	12	72
2	-5			-205

4. Mặt sàn tầng một của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, mỗi bậc cao 18 cm.
 - a) Viết công thức để tìm độ cao của một bậc tùy ý so với mặt sân.
 - b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.
5. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng, nếu nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ ?