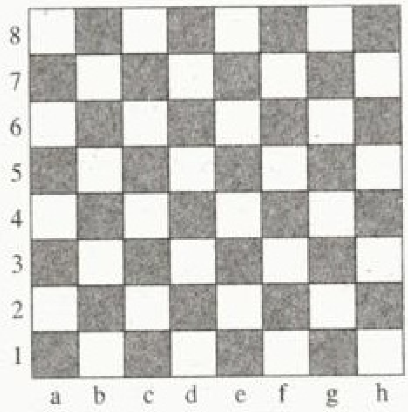
§4 CẤP SỐ NHÂN

I – ĐỊNH NGHĨA

1

Tục truyền rằng nhà Vua Ấn Độ cho phép người phát minh ra bàn cờ Vua được lựa chọn một phần thưởng tuỳ theo sở thích. Người đó chỉ xin nhà vua thưởng cho số thóc bằng số thóc được đặt lên 64 ô của bàn cờ như sau : Đặt lên ô thứ nhất của bàn cờ một hạt thóc, tiếp đến ô thứ hai hai hạt, ... cứ như vậy, số hạt thóc ở ô sau gấp đôi số hạt thóc ở ô liền trước cho đến ô cuối cùng.

Hãy cho biết số hạt thóc ở các ô từ thứ nhất đến thứ sáu của bàn cờ.



ĐỊNH NGHĨA

> ***Cấp số nhân*** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.
>
> Số q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n . q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1)}$$

Đặc biệt :

- Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, ..., 0, ...$
- Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, ..., 0, ...$

Ví dụ 1. Chứng minh dãy số hữu hạn sau là một cấp số nhân :

$$-4, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}.$$

Giải. Vì $1 = (-4).\left(-\frac{1}{4}\right)$; $-\frac{1}{4} = 1.\left(-\frac{1}{4}\right)$;

$$\frac{1}{16} = \left(-\frac{1}{4}\right).\left(-\frac{1}{4}\right); \quad -\frac{1}{64} = \frac{1}{16}.\left(-\frac{1}{4}\right)$$

nên dãy số

$$-4, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}$$

là một cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{4}$. ■

II – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

2

Hãy đọc hoạt động **1** và cho biết ô thứ 11 có bao nhiêu hạt thóc ?

Bằng phương pháp quy nạp, ta có thể chứng minh được định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

> Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức
>
> $$u_n = u_1 . q^{n-1} \text{ với } n \geq 2. \qquad (2)$$

Ví dụ 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$, $q = -\dfrac{1}{2}$.

a) Tính u_7.

b) Hỏi $\dfrac{3}{256}$ là số hạng thứ mấy ?

Giải

a) Áp dụng công thức (2), ta có

$$u_7 = u_1.q^6 = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{64}.$$

b) Theo công thức (2), ta có

$$u_n = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{256} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256} = \left(-\frac{1}{2}\right)^8.$$

Suy ra $n - 1 = 8$ hay $n = 9$.

Vậy số $\dfrac{3}{256}$ là số hạng thứ chín. ■

Ví dụ 3. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần.

a) Hỏi một tế bào sau mười lần phân chia sẽ thành bao nhiêu tế bào ?

b) Nếu có 10^5 tế bào thì sau hai giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào ?

Giải

a) Vì ban đầu có một tế bào và mỗi lần một tế bào phân chia thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 1$, $q = 2$ và u_{11} là số tế bào nhận được sau mười lần phân chia. Vậy sau 10 lần phân chia, số tế bào nhận được là

$$u_{11} = 1\ .\ 2^{11-1} = 2^{10} = 1024.$$

b) Vì ban đầu có 10^5 tế bào và mỗi lần một tế bào phân chia thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^5$, $q = 2$. Vì cứ 20 phút lại phân đôi một lần nên sau hai giờ sẽ có 6 lần phân chia tế bào và u_7 là số tế bào nhận được sau hai giờ. Vậy số tế bào nhận được sau hai giờ phân chia là

$$u_7 = 10^5.2^{7-1} = 10^5.2^6 = 6\ 400\ 000.$$ ■

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

3

Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -\frac{1}{2}$.

a) Viết năm số hạng đầu của nó.

b) So sánh u_2^2 với tích $u_1 . u_3$ và u_3^2 với tích $u_2 . u_4$.

Nêu nhận xét tổng quát từ kết quả trên.

ĐỊNH LÍ 2

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \text{ với } k \geq 2 \qquad (3)$$

(hay $|u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$).

Chứng minh. Sử dụng công thức (2) với $k \geq 2$, ta có

$$u_{k-1} = u_1 . q^{k-2};$$

$$u_{k+1} = u_1 . q^k.$$

Suy ra $u_{k-1} . u_{k+1} = u_1^2 \, q^{2k-2} = (u_1 q^{k-1})^2 = u_k^2$. ■

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

4

Tính tổng số các hạt thóc ở 11 ô đầu của bàn cờ nêu ở hoạt động **1**.

Cấp số nhân (u_n) có công bội q có thể viết dưới dạng

$$u_1, u_1q, u_1q^2, ..., u_1q^{n-1}, ...$$

Khi đó

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... + u_1q^{n-1}. \qquad (4)$$

Nhân hai vế của (4) với q, ta được

$$q.S_n = u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + ... + u_1q^n. \quad (5)$$

Trừ từng vế tương ứng của các đẳng thức (4) và (5), ta được

$$(1 - q)\, S_n = u_1\,(1 - q^n).$$

Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n.$$

Khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (6)$$

CHÚ Ý

Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$ Khi đó $S_n = n.u_1$.

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 2$, $u_3 = 18$. Tính tổng của mười số hạng đầu tiên.

Giải. Theo giả thiết, $u_1 = 2$, $u_3 = 18$. Ta có

$$u_3 = u_1.q^2 \Rightarrow 2.q^2 = 18 \Rightarrow q = \pm 3.$$

Vậy có hai trường hợp :

- $q = 3$, ta có $S_{10} = \dfrac{2(1 - 3^{10})}{1 - 3} = 59\,048$;
- $q = -3$, ta có $S_{10} = \dfrac{2\left[1 - (-3)^{10}\right]}{1 - (-3)} = -29\,524$. ■

5

Tính tổng $S = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n}$.

BẠN CÓ BIẾT ?

NHÀ VUA ẤN ĐỘ KHÔNG ĐỦ THÓC ĐỂ THƯỞNG CHO NGƯỜI ĐÃ PHÁT MINH RA BÀN CỜ VUA !

Hãy đọc lại 1 ở §4, chúng ta sẽ thấy số hạt thóc để làm phần thưởng chính là tổng 64 số hạng đầu của cấp số nhân với $u_1 = 1$ và $q = 2$. Vậy

$$S_{64} = 1 + 2 + 4 + ... + 2^{63} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Cứ cho rằng 1000 hạt thóc nặng 20 gam (cho dù ít hơn thực tế), thì khối lượng thóc là

$$\frac{20(2^{64}-1)}{1000} \text{ gam} \approx 369 \text{ tỉ tấn.}$$

Nếu đem rải đều số thóc này lên bề mặt của Trái Đất thì sẽ được một lớp thóc dày 9 mm ! Thử hỏi, nhà vua làm sao có được một lượng thóc khổng lồ như vậy ?

Bài tập

1. Chứng minh các dãy số $\left(\frac{3}{5} \cdot 2^n\right)$, $\left(\frac{5}{2^n}\right)$, $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ là các cấp số nhân.

2. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q.

a) Biết $u_1 = 2$, $u_6 = 486$. Tìm q.

b) Biết $q = \frac{2}{3}$, $u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm u_1.

c) Biết $u_1 = 3$, $q = -2$. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy ?

3. Tìm các số hạng của cấp số nhân (u_n) có năm số hạng, biết :

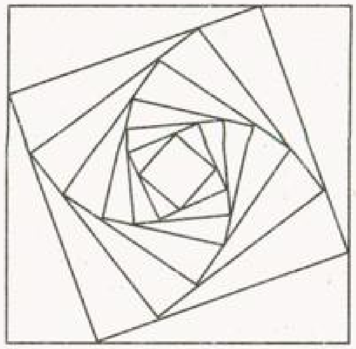
a) $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$;

b) $u_4 - u_2 = 25$ và $u_3 - u_1 = 50$.

4. Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng sau là 62.

5. Tỉ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì sau 5 năm, 10 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu ?

6. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (h.44). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp như trên để được hình vuông C_3, ... Tiếp tục quá trình trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ...$.



Hình 44

Gọi a_n là độ dài cạnh của hình vuông C_n. Chứng minh dãy số (a_n) là một cấp số nhân.

BÀI ĐỌC THÊM

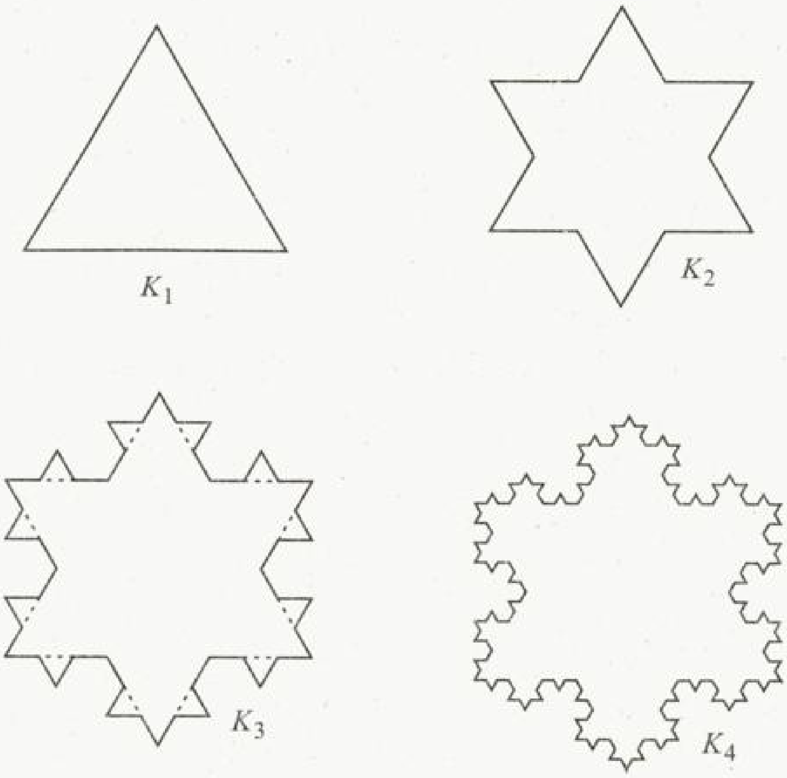
DÃY SỐ TRONG HÌNH BÔNG TUYẾT VÔN KỐC (HÌNH HỌC FRACTAL)

Thuật ngữ "Fractal" được Bơ-noa Man-đen-bơ-rô (Benoit Mandelbrot) sử dụng vào năm 1975. Nó có gốc La-tinh "Fractus", nghĩa là một bề mặt không đều giống như một khối đá nứt gẫy. Theo B. Man-đen-bơ-rô thì : "Hình học Fractal có hai vai trò, nó diễn tả hình học của sự hỗn độn và nó cũng có thể diễn tả về hình học của núi, mây và các dải ngân hà".

Các Fractal có hình thù mà ta có thể nhìn thấy trong tự nhiên, đó là cây, lá, khối đá, những bông tuyết ... . Song, rút ra được một công thức hình học của chúng như thế nào ? Làm thế nào để định hình được hình dạng của những bọt kem trong li cà-phê ? Hình học Fractal, lí thuyết về sự hỗn độn và những phép toán phức tạp liệu có thể trả lời được các câu hỏi này hay không ? Khoa học đang khám phá ra một trật tự không thể ngờ đằng sau những hiện tượng kì lạ có vẻ hết sức lộn xộn của vạn vật.

H.von Koch
(1879 – 1924)

Có thể nói Fractal là cấu trúc hình học được chi tiết hoá bằng cách mở rộng ở mọi tỉ lệ. Mỗi phần nhỏ của Fractal là sự mô phỏng của toàn bộ Fractal. Mỗi Fractal được tạo ra bởi quá trình lặp đi, lặp lại, trong đó sự kết thúc của quá trình trước lại là sự bắt đầu của quá trình tiếp theo. Để minh hoạ, ta hãy xét bông tuyết vôn Kốc do nhà toán học Thuỵ Điển vôn Kốc (von Koch) đưa ra vào năm 1904 (h.45).



Hình 45

Bông tuyết đầu tiên K_1 là một tam giác đều có cạnh bằng 1. Tiếp đó, chia mỗi cạnh của tam giác thành ba đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bởi hai đoạn bằng nó sao cho chúng tạo với đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía ngoài, ta được bông tuyết K_2. Cứ tiếp tục như vậy theo nguyên tắc : Từ bông tuyết K_n để có bông tuyết K_{n+1}, ta chia mỗi cạnh của K_n thành ba đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bởi hai đoạn bằng nó, sao cho chúng tạo với mỗi đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía ngoài.

Quá trình trên lặp đi, lặp lại cho ta một dãy các bông tuyết K_1, K_2, K_3, ..., K_n, ...

Kí hiệu C_n, a_n, p_n và S_n lần lượt là số cạnh, độ dài cạnh, chu vi và diện tích của bông tuyết K_n, ta có các dãy số (C_n), (a_n), (p_n), (S_n).

1. Dãy số (C_n) được cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_{n+1} = 4.C_n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

Dãy số (C_n) là một cấp số nhân với $C_1 = 3$, $q = 4$ và $C_n = 3 \,.\, 4^{n-1}$.

2. Dãy số (a_n) là một cấp số nhân với $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$ và $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

3. Dãy số (p_n) có $p_n = C_n.a_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ nên (p_n) là một cấp số nhân với $p_1 = 3$, $q = \frac{4}{3}$.

Vì $p_n > 0$ và $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{3.\left(\frac{4}{3}\right)^n}{3.\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} = \frac{4}{3} > 1$ nên $p_{n+1} > p_n$. Vậy (p_n) là dãy số tăng và

p_n có thể lớn bao nhiêu tuỳ ý (điều này sẽ thấy rõ hơn ở chương sau).

4. Dãy số (S_n) có

$$S_{n+1} = S_n + C_n \,.\, a_{n+1}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = S_n + 3.4^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

hay $S_{n+1} = S_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Từ đây có thể suy ra

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{1 - \frac{4}{9}} < \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Dãy số (S_n) bị chặn trên.

Điều thú vị của dãy vôn Kốc là ở chỗ chu vi p_n có thể lớn tuỳ ý với n đủ lớn, trong khi diện tích S_n lại bị chặn (!)

Các nhà toán học đã cố gắng mô tả hình dạng của các Fractal từ hơn một trăm năm qua. Với khả năng của các máy tính hiện đại, Fractal đã trở thành một đề tài được quan tâm đặc biệt, bởi chúng có thể được diễn tả bằng kĩ thuật số và được khám phá qua mọi vẻ đẹp hấp dẫn của chúng. Fractal đang được sử dụng như một phương tiện hỗ trợ cho Toán học và nó cũng thể hiện được những nét đẹp văn hoá trong và ngoài hành tinh thông qua nền công nghiệp điện ảnh.