

# §5 ĐẠO HÀM CẤP HAI

## I - ĐỊNH NGHĨA



Tính  $y'$  và đạo hàm của  $y'$ , biết :

a)  $y = x^3 - 5x^2 + 4x$ ;

b)  $y = \sin 3x$ .

Giả sử hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại mỗi điểm  $x \in (a ; b)$ .

Khi đó, hệ thức  $y' = f'(x)$  xác định một hàm số mới trên khoảng  $(a ; b)$ . Nếu hàm số  $y' = f'(x)$  lại có đạo hàm tại  $x$  thì ta gọi đạo hàm của  $y'$  là đạo hàm cấp hai của hàm số  $y = f(x)$  tại  $x$  và kí hiệu là  $y''$  hoặc  $f''(x)$ .

### CHÚ Ý

- Đạo hàm cấp 3 của hàm số  $y = f(x)$  được định nghĩa tương tự và kí hiệu là  $y'''$  hoặc  $f'''(x)$  hoặc  $f^{(3)}(x)$ .
- Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp  $n - 1$ , kí hiệu là  $f^{(n-1)}(x)$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ ). Nếu  $f^{(n-1)}(x)$  có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp  $n$  của  $f(x)$ , kí hiệu là  $y^{(n)}$  hoặc  $f^{(n)}(x)$ .

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

**Ví dụ.** Với  $y = x^5$  thì

$$y' = 5x^4, y'' = 20x^3, y''' = 60x^2,$$

$$y^{(4)} = 120x, y^{(5)} = 120 \text{ và } y^{(n)} = 0 \text{ với } n > 5.$$

## II – Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI



2

Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình  $s = \frac{1}{2}gt^2$  (trong đó  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ ). Hãy tính vận tốc tức thời  $v(t)$  tại các thời điểm  $t_0 = 4 \text{ s}$ ;  $t_1 = 4,1 \text{ s}$ .

Tính tỉ số  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  trong khoảng  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

Xét chuyển động xác định bởi phương trình  $s = f(t)$ , trong đó  $s = f(t)$  là một hàm số có đạo hàm đến cấp hai. Vận tốc tức thời tại  $t$  của chuyển động là  $v(t) = f'(t)$ .

Lấy số gia  $\Delta t$  tại  $t$  thì  $v(t)$  có số gia tương ứng là  $\Delta v$ .

Tỉ số  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  được gọi là **gia tốc trung bình** của chuyển động trong khoảng thời gian  $\Delta t$ . Nếu tồn tại

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \gamma(t),$$

ta gọi  $v'(t) = \gamma(t)$  là **gia tốc tức thời** của chuyển động tại thời điểm  $t$ .

Vì  $v(t) = f'(t)$  nên

$$\boxed{\gamma(t) = f''(t)}.$$

### 1. Ý nghĩa cơ học

Đạo hàm cấp hai  $f''(t)$  là **gia tốc tức thời** của chuyển động  $s = f(t)$  tại thời điểm  $t$ .



3

Tính **gia tốc tức thời** của sự rơi tự do  $s = \frac{1}{2}gt^2$ .

### 2. Ví dụ

Xét chuyển động có phương trình

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (A, \omega, \varphi \text{ là những hằng số}).$$

Tìm **gia tốc tức thời** tại thời điểm  $t$  của chuyển động.

**Giai.** Gọi  $v(t)$  là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm  $t$ , ta có

$$v(t) = s'(t) = [A\sin(\omega t + \varphi)]' = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Vậy giá tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm  $t$  là

$$\gamma(t) = s''(t) = v'(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \blacksquare$$

### Bài tập

1. a) Cho  $f(x) = (x + 10)^6$ . Tính  $f''(2)$ .
  - b) Cho  $f(x) = \sin 3x$ . Tính  $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right), f''(0), f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$ .
  2. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau :
- |                          |                                 |
|--------------------------|---------------------------------|
| a) $y = \frac{1}{1-x}$ ; | b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ; |
| c) $y = \tan x$ ;        | d) $y = \cos^2 x$ .             |

### BẠN CÓ BIẾT



#### LAI-BƠ-NÍT (LEIBNIZ)

Đồng thời và độc lập với Niu-tơn, nhà bác học người Đức Lai-bơ-nít là người phát minh ra phép tính vi phân và tích phân. Nhiều kí hiệu như  $\frac{dy}{dx}, \int f(x)dx, \dots$  và thuật ngữ như "vi phân", "tích phân" ... do Lai-bơ-nít đưa ra vẫn còn được sử dụng đến ngày nay.

Công thức tính đạo hàm cấp  $n$  của tích hai hàm  $u.v$  ( $u$  và  $v$  có đạo hàm đến cấp  $n$ ) sau đây là của Lai-bơ-nít

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + C_n^p u^{(n-p)}v^{(p)} + \dots + C_n^{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}. \quad (*)$$



Leibniz  
(1646 – 1716)

Có thể chứng minh công thức trên bằng phương pháp quy nạp.

Lai-bơ-nít sinh ngày 1-7-1646 tại Lai-xích (Leipzig). Cha ông là Giáo sư luân lí đã mất khi ông mới 6 tuổi nhưng ông đã kịp thừa hưởng ở người cha lòng ham mê môn Lịch sử. Ngoài những buổi học ở trường, Lai-bơ-nít tự trang bị kiến thức nhờ thường xuyên đọc sách trong thư viện của cha. Ông học tiếng La-tinh lúc 8 tuổi, đến 10 tuổi, ông đã làm thơ bằng tiếng La-tinh. Sau đó, ông học tiếng Hy Lạp và rất giỏi thứ tiếng này nhờ sự cố gắng rất lớn. Năm 15 tuổi, Lai-bơ-nít là sinh viên luật của Trường Đại học Tổng hợp Lai-xích. Trong hai năm đầu, ngoài việc theo học Luật, ông đọc rất nhiều sách về Triết học, năm 17 tuổi (1663), nhờ bản luận văn xuất sắc về một trong những học thuyết lớn về Triết học, Lai-bơ-nít được nhận Bằng Cử nhân.

Mùa hè 1663, Lai-bơ-nít chuyển sang học các giáo trình toán của Erhard Weigel ở Trường Đại học Tổng hợp Iéna.

Năm 20 tuổi (1666), ông trở lại học Luật ở Lai-xích và chuẩn bị thi lấy Bằng Tiến sĩ. Vì ghen tị, người ta từ chối cấp Bằng Tiến sĩ cho Lai-bơ-nít. Họ nêu lí do là ông còn quá trẻ. Song thật ra vì ông hiểu biết về luật nhiều hơn tất cả các giáo sư ở Lai-xích cộng lại.

Chán ngấy thái độ hẹp hòi bao trùm Trường Đại học Lai-xích, ông rời thành phố quê hương đến Nuy-răm-be (Nuremberg). Ở đây, ông được phong học vị Tiến sĩ vào ngày 4-11-1666 nhờ công trình về phương pháp giảng dạy mới về luật. Hơn nữa, người ta còn mời ông giữ chức vụ Giáo sư luật, nhưng ông từ chối. Lai-bơ-nít đã soạn công trình về giảng dạy Luật và đề xuất kế hoạch cải tiến của mình trên đường đi từ Lai-xích đến Nuy-răm-be. Một trong những đặc trưng của cuộc đời Lai-bơ-nít là ông có thể làm việc trong bất kì điều kiện nào, ở bất kì đâu, và trong mọi thời điểm. Ông đọc, viết, nghiên ngẫm không ngừng. Ông đã viết phần lớn các công trình toán học của mình (không kể những công trình đặc sắc về rất nhiều lĩnh vực khác nhau) trong các chuyến xe ngựa trên những con đường nhỏ ở châu Âu hồi thế kỉ XVII khi ông phải đi đây, đi đó theo yêu cầu của khách hàng. Hoạt động không mệt mỏi này của ông đã để lại cho chúng ta một khối lượng giấy viết đủ loại, đủ cỡ và phải lớn như một đống cỏ khô, chưa kịp phân loại, và mới chỉ được công bố một phần. Ngày nay, phần lớn số giấy này còn đang được đóng gói trong một góc của thư viện Hoàng gia ở Ha-nô-vơ (Hanover).

Thật khó tin được rằng chỉ một cái đầu lại có thể sản sinh ra được toàn bộ tư tưởng (đã hoặc chưa in ra) mà Lai-bơ-nít đã để lại trên những trang giấy kia. Điều làm các nhà giải phẫu ngạc nhiên là sau khi đo và quan sát hộp sọ của Lai-bơ-nít người ta nhận thấy rằng nó nhỏ hơn nhiều so với hộp sọ của một người bình thường (Không hiểu lời đồn ấy có thật hay không!).

Ông là nhà bác học lớn trong rất nhiều lĩnh vực (Luật, Tôn giáo, Chính trị, Lịch sử, Văn học, Logic, Triết học, Toán học, Siêu hình). Chỉ cần có một trong những cống hiến trên đây của ông cũng đủ lưu danh hậu thế. Người ta bảo Lai-bơ-nít là một ví dụ chứng tỏ câu phương ngôn "Biết nhiều nghề, chẳng giỏi nghề nào" không đúng.

Ông là người sáng lập Viện Hàn lâm Khoa học Đức mà ông là vị Chủ tịch đầu tiên. Ông mất vào ngày 14-11-1716 ở Ha-nô-vơ trong cô đơn.