

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

§3 LUỢNG GIÁC

1. Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$



1

Tính $\frac{\sin 0,01}{0,01}, \frac{\sin 0,001}{0,001}$ bằng máy tính bỏ túi.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ví dụ 1. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \blacksquare$$

Ví dụ 2. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

$$\text{Giải. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2.1 = 2. \blacksquare$$

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

ĐỊNH LÍ 2

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

Chứng minh. Giả sử Δx là số gia của x . Ta có :

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Vì $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ (do tính liên tục của hàm số $y = \cos x$)

và $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ nên $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\cos x = \cos x$.

Vậy $y' = (\sin x)' = \cos x$. ■

CHÚ Ý

Nếu $y = \sin u$ và $u = u(x)$ thì

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u.$$

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$.

Giải. Đặt $u = 3x + \frac{\pi}{5}$ thì $u' = 3$ và $y = \sin u$.

Ta có $y' = u' \cos u = 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$. ■

3. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$



Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

ĐỊNH LÍ 3

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

Từ nhận xét $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ suy ra ngay điều phải chứng minh.

CHÚ Ý.

Nếu $y = \cos u$ và $u = u(x)$ thì

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u.$$

Ví dụ 4. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \cos(x^3 - 1)$.

Giải. Đặt $u = x^3 - 1$ thì $u' = 3x^2$ và $y = \cos u$.

Ta có

$$y' = -u' \sin u = -3x^2 \sin(x^3 - 1). \blacksquare$$

4. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$



Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$.

ĐỊNH LÍ 4

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm của một thương đối với hàm số $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, suy ra điều phải chứng minh.

CHÚ Ý

Nếu $y = \tan u$ và $u = u(x)$ thì ta có

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

Ví dụ 5. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \tan(3x^2 + 5)$.

Giải. Đặt $u = 3x^2 + 5$ thì $u' = 6x$ và $y = \tan u$.

Ta có

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \frac{6x}{\cos^2(3x^2 + 5)}. \blacksquare$$

5. Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$



Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ với } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

ĐỊNH LÍ 5

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

CHÚ Ý

Nếu $y = \cot u$ và $u = u(x)$, ta có

$$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Ví dụ 6. Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = \cot^3(3x - 1).$$

Giải. Đặt $u = \cot(3x - 1)$ thì $y = u^3$.

Theo công thức đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot u'_x \\ &= 3\cot^2(3x - 1)[\cot(3x - 1)]' \\ &= 3\cot^2(3x - 1) \cdot \frac{-(3x - 1)'}{\sin^2(3x - 1)} \\ &= 3\cot^2(3x - 1) \cdot \frac{-3}{\sin^2(3x - 1)} \\ &= -\frac{9\cos^2(3x - 1)}{\sin^4(3x - 1)}. \blacksquare \end{aligned}$$

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

Bài tập

1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{x-1}{5x-2}$;

b) $y = \frac{2x+3}{7-3x}$;

c) $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{3 - 4x}$;

d) $y = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2 - 3x}$.

2. Giải các bất phương trình sau :

a) $y' < 0$ với $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$;

b) $y' \geq 0$ với $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$;

c) $y' > 0$ với $y = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$.

3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

- a) $y = 5\sin x - 3\cos x$; b) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;
 c) $y = x \cot x$; d) $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$;
 e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$; f) $y = \sin \sqrt{1 + x^2}$.

4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

- a) $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$; b) $y = \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)(7x - 3)$;
 c) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$; d) $y = \tan^2 x - \cot x^2$;
 e) $y = \cos \frac{x}{1+x}$.

5. Tính $\frac{f'(1)}{\varphi'(1)}$, biết rằng $f(x) = x^2$ và $\varphi(x) = 4x + \sin \frac{\pi x}{2}$.

6. Chứng minh rằng các hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc x :

- a) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$;
 b) $y = \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) +$
 $+ \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$.

7. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng :

- a) $f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$;
 b) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$.

8. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$, biết rằng :

- a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$;
 b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$.