§2 DÃY SỐ

I – ĐỊNH NGHĨA

1

Cho hàm số $f(n) = \frac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$.

1. Định nghĩa dãy số

> Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số vô hạn*** (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu :
>
> $$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
> $$n \mapsto u(n).$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...,$$

trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n), và gọi u_1 là ***số hạng đầu***, u_n là số hạng thứ n và là ***số hạng tổng quát*** của dãy số.

Ví dụ 1

a) Dãy các số tự nhiên lẻ 1, 3, 5, 7, ... có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_n = 2n - 1$.

b) Dãy các số chính phương 1, 4, 9, 16, ... có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_n = n^2$.

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

> Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, ..., m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số hữu hạn.***

Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, ..., u_m$, trong đó u_1 là ***số hạng đầu***, u_m là ***số hạng cuối***.

Ví dụ 2

a) $-5, -2, 1, 4, 7, 10, 13$ là dãy số hữu hạn có $u_1 = -5$, $u_7 = 13$.

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ là dãy số hữu hạn có $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_5 = \frac{1}{32}$.

II – CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

2

Hãy nêu các phương pháp cho một hàm số và ví dụ minh hoạ.

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Ví dụ 3

a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.\frac{3^n}{n}$. (1)

Từ công thức (1), ta có thể xác định được bất kì một số hạng nào của dãy số. Chẳng hạn, $u_5 = (-1)^5.\frac{3^5}{5} = -\frac{243}{5}$.

Nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được

$$-3, \frac{9}{2}, -9, \frac{81}{4}, ..., (-1)^n.\frac{3^n}{n}, ...$$

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{\sqrt{n}+1}$ có dạng khai triển là

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{2}+1}, \frac{3}{\sqrt{3}+1}, ..., \frac{n}{\sqrt{n}+1}, ...$$

Như vậy, dãy số (u_n) hoàn toàn xác định nếu biết công thức số hạng tổng quát u_n của nó.

3

Viết năm số hạng đầu và số hạng tổng quát của các dãy số sau :

a) Dãy nghịch đảo của các số tự nhiên lẻ ;

b) Dãy các số tự nhiên chia cho 3 dư 1.

Cũng giống như hàm số, không phải mọi dãy số đều có công thức số hạng tổng quát u_n. Dưới đây, ta nêu thêm các cách khác để cho một dãy số.

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Ví dụ 4. Số π là số thập phân vô hạn không tuần hoàn

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ ...$$

Nếu lập dãy số (u_n) với u_n là giá trị gần đúng thiếu của số π với sai số tuyệt đối 10^{-n} thì

$$u_1 = 3{,}1\ ;\ u_2 = 3{,}14\ ;\ u_3 = 3{,}141\ ;\ u_4 = 3{,}1415\ ;\ ...\ .$$

Đó là dãy số được cho bằng *phương pháp mô tả,* trong đó chỉ ra cách viết các số hạng liên tiếp của dãy.

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Ví dụ 5. Dãy Phi-bô-na-xi(*) là dãy số (u_n) được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{với } n \geq 3, \end{cases}$$

nghĩa là, kể từ số hạng thứ ba trở đi, mỗi số hạng đều bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó.

Cách cho dãy số như trên được gọi là cho bằng *phương pháp truy hồi.*

Nói cách khác, cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là :

a) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).

b) Cho *hệ thức truy hồi*, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

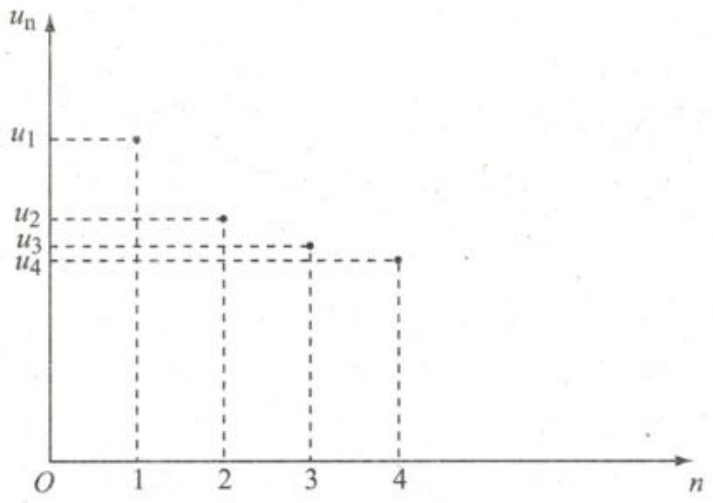
4
Viết mười số hạng đầu của dãy Phi-bô-na-xi.

(*) Phi-bô-na-xi (Fibonacci, 1170 – 1250) – Thương gia, nhà toán học I-ta-li-a.

III – BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA DÃY SỐ

Vì dãy số là một hàm số trên $\mathbb{N}^*$ nên ta có thể biểu diễn dãy số bằng đồ thị. Khi đó trong mặt phẳng toạ độ, dãy số được biểu diễn bằng các điểm có toạ độ $(n\ ;\ u_n)$.

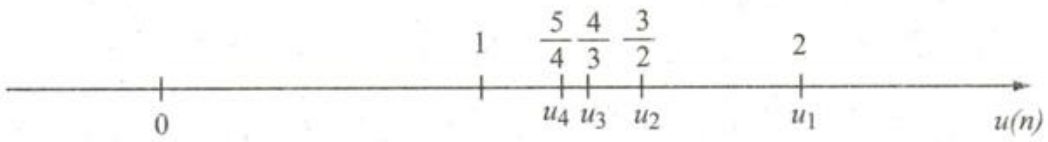
Ví dụ 6. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ có biểu diễn hình học như trên Hình 40 :



Hình 40

$$u_1 = 2,\ u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{4}{3},\ u_4 = \frac{5}{4}, \ldots$$

Tuy nhiên, người ta thường biểu diễn các số hạng của một dãy số trên trục số. Chẳng hạn, dãy số $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ có biểu diễn hình học như trên Hình 41.



Hình 41

IV – DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

5

Cho các dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = 1 + \frac{1}{n}$; $v_n = 5n - 1$.

a) Tính u_{n+1}, v_{n+1}.

b) Chứng minh $u_{n+1} < u_n$ và $v_{n+1} > v_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

ĐỊNH NGHĨA 1

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số tăng*** nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số giảm*** nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 7. Dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là dãy số tăng.

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ xét hiệu $u_{n+1} - u_n$. Ta có

$$u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) - 1 - (2n - 1) = 2.$$

Do $u_{n+1} - u_n > 0$ nên $u_{n+1} > u_n$. ■

Ví dụ 8. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$ là dãy số giảm.

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, vì $u_n > 0$ nên có thể xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3n}.$$

Dễ thấy $\frac{n+1}{3n} < 1$ nên $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ suy ra $u_{n+1} < u_n$. ■

CHÚ Ý

Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$, tức là dãy

$$-3, 9, -27, 81, ...$$

không tăng và cũng không giảm.

2. Dãy số bị chặn

6

Chứng minh các bất đẳng thức $\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{2}$ và $\frac{n^2+1}{2n} \geq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

ĐỊNH NGHĨA 2

Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 9

a) Dãy số Phi-bô-na-xi bị chặn dưới vì $u_n \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ bị chặn vì $0 < \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

BẠN CÓ BIẾT ?

HOA, LÁ VÀ DÃY SỐ PHI-BÔ-NA-XI

Fibonacci
(1170 – 1250)

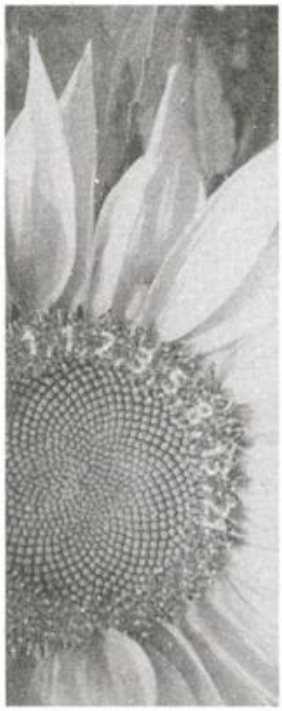
Dãy số Phi-bô-na-xi thường gặp trong thiên nhiên. Những chiếc lá trên cành cây mọc cách nhau các khoảng ứng với các số trong dãy số Phi-bô-na-xi (còn gọi là các số Phi-bô-na-xi)

3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... (F)

Số cánh hoa trong hầu hết các bông hoa là các số trong dãy (F). Hoa loa kèn có 3 cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa phi yến có 8 cánh, hoa cúc vạn thọ 13 cánh, hoa cúc tây 21 cánh, còn hoa cúc thường có 34 hoặc 55, hoặc 89 cánh.

Trong hoa hướng dương cũng xuất hiện các số Phi-bô-na-xi. Những nụ nhỏ kết thành hạt ở đầu bông hoa và xếp thành hai lớp đường xoắn ốc. Một lớp cuộn theo chiều kim đồng hồ, lớp đường xoắn kia cuộn theo chiều ngược lại. Số các đường xoắn ốc theo chiều kim đồng hồ thường là 34 hoặc 55, còn số đường xoắn theo chiều ngược lại thường là 55 hoặc 89, ...

Ngoài những điều thú vị trên, một số vấn đề của kiến trúc, hội hoạ, âm nhạc, ... cũng liên quan đến các số Phi-bô-na-xi.



Hoa hướng dương

Bài tập

1. Viết năm số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức :

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n - 1}$; b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$;

c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; d) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

2. Cho dãy số (u_n), biết :

$$u_1 = -1, \quad u_{n+1} = u_n + 3 \text{ với } n \geq 1.$$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp : $u_n = 3n - 4$.

3. Dãy số (u_n) cho bởi :

$$u_1 = 3 \; ; \; u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \; , \; n \geq 1.$$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

4. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết :

a) $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$; b) $u_n = \dfrac{n - 1}{n + 1}$;

c) $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$; d) $u_n = \dfrac{2n + 1}{5n + 2}$.

5. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn ?

a) $u_n = 2n^2 - 1$; b) $u_n = \dfrac{1}{n(n + 2)}$;

c) $u_n = \dfrac{1}{2n^2 - 1}$; d) $u_n = \sin n + \cos n$.