§1 ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

I – ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

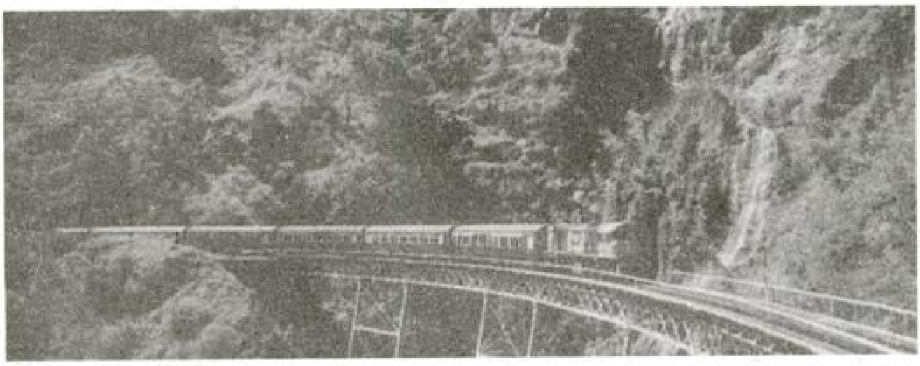
1. Các bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm

1

Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (phút). Ở những phút đầu tiên, hàm số đó là $s = t^2$.

Hãy tính vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng $[t\,;\,t_0]$ với $t_0 = 3$ và $t = 2$; $t = 2{,}5$; $t = 2{,}9$; $t = 2{,}99$.

Nêu nhận xét về những kết quả thu được khi t càng gần $t_0 = 3$.



a) Bài toán tìm vận tốc tức thời

Một chất điểm M chuyển động trên trục $s'Os$ (h. 61).

Hình 61

Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian t

$$s = s(t).$$

Hãy tìm một đại lượng đặc trưng cho mức độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0.

Giải. Trong khoảng thời gian từ t_0 đến t, chất điểm đi được quãng đường là

$$s - s_0 = s(t) - s(t_0).$$

Nếu chất điểm chuyển động đều thì tỉ số

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

là một hằng số với mọi t.

Đó chính là vận tốc của chuyển động tại mọi thời điểm.

Nếu chất điểm chuyển động không đều thì tỉ số trên là vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian $|t - t_0|$.

Khi t càng gần t_0, tức là $|t - t_0|$ càng nhỏ thì vận tốc trung bình càng thể hiện được chính xác hơn mức độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0.

Từ nhận xét trên, người ta đưa ra định nghĩa sau đây.

> Giới hạn hữu hạn (nếu có)
>
> $$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$
>
> được gọi là ***vận tốc tức thời*** của chuyển động tại thời điểm t_0.

Đó là đại lượng đặc trưng cho mức độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0.

b) Bài toán tìm cường độ tức thời

Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t :

$$Q = Q(t).$$

Cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian $|t - t_0|$ là

$$I_{tb} = \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}.$$

Nếu $|t - t_0|$ càng nhỏ thì tỉ số này càng biểu thị chính xác hơn cường độ dòng điện tại thời điểm t_0. Người ta đưa ra định nghĩa sau đây.

Giới hạn hữu hạn (nếu có)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$$

được gọi là ***cường độ tức thời*** của dòng điện tại thời điểm t_0.

NHẬN XÉT

Nhiều bài toán trong Vật lí, Hoá học, ... đưa đến việc tìm giới hạn dạng $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, trong đó $y = f(x)$ là một hàm số đã cho. Giới hạn trên dẫn tới một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm *đạo hàm*.

2. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ và $x_0 \in (a ; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

CHÚ Ý

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại x_0.

Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

3. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

2

Cho hàm số $y = x^2$. Hãy tính $y'(x_0)$ bằng định nghĩa.

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa, ta có quy tắc sau đây.

QUY TẮC

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0, tính

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tìm $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Giải. Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$. Ta có

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2(2 + \Delta x)};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} = -\frac{1}{4}.$$

Vậy $f'(2) = -\frac{1}{4}$. ■

4. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

> Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

CHÚ Ý

a) Định lí trên tương đương với khẳng định :

Nếu hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

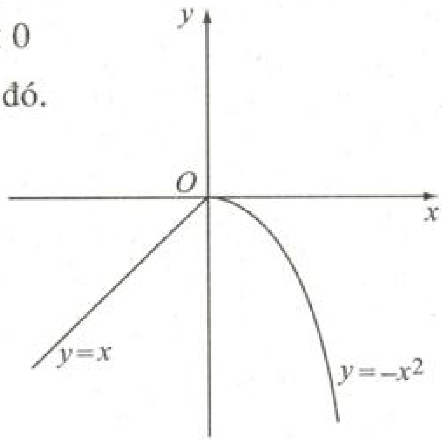
b) Mệnh đề đảo của Định lí 1 không đúng.

Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.

Chẳng hạn, hàm số $$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đó.

Ta nhận xét rằng đồ thị của hàm số này là một đường liền, nhưng bị "gãy" tại điểm $O(0 ; 0)$ (h. 62).



Hình 62

5. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

3

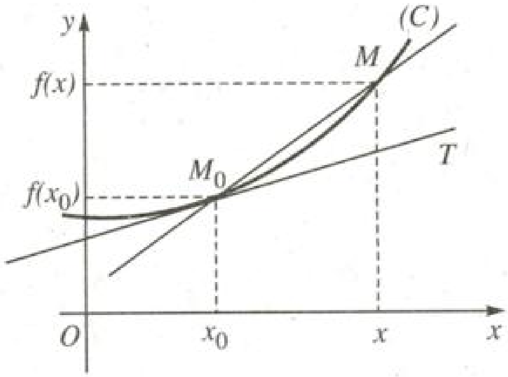
a) Vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

b) Tính $f'(1)$.

c) Vẽ đường thẳng đi qua điểm $M(1 ; \dfrac{1}{2})$ và có hệ số góc bằng $f'(1)$. Nêu nhận xét về vị trí tương đối của đường thẳng này và đồ thị hàm số đã cho.

a) Tiếp tuyến của đường cong phẳng

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường cong (C). Giả sử (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $M_0(x_0 ; f(x_0)) \in (C)$. Kí hiệu $M(x ; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C). Đường thẳng M_0M là một cát tuyến của (C) (h.63).



Hình 63

Nhận xét rằng khi $x \to x_0$ thì $M(x\ ;\ f(x))$ di chuyển trên (C) tới điểm $M_0(x_0\ ;\ f(x_0))$ và ngược lại. Giả sử cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn, kí hiệu là M_0T thì M_0T được gọi là ***tiếp tuyến*** của (C) tại M_0. Điểm M_0 được gọi là ***tiếp điểm***.

Sau đây, ta không xét trường hợp tiếp tuyến song song hoặc trùng với Oy.

b) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a\ ;\ b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.

ĐỊNH LÍ 2

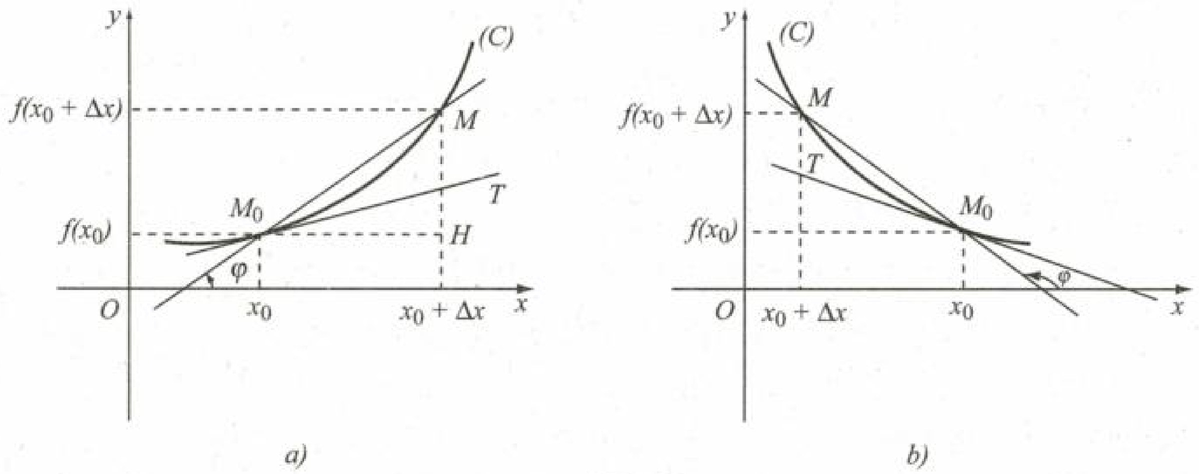
Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0\ (x_0\ ;\ f(x_0))$.

Chứng minh. Giả sử $M(x_0 + \Delta x\ ;\ f(x_0 + \Delta x))$ là điểm di chuyển trên (C). Ta có (h.64)

$$\overline{M_0H} = \Delta x,\ \overline{HM} = \Delta y.$$

Hệ số góc của cát tuyến M_0M là $\tan\varphi$, trong đó φ là góc tạo bởi trục Ox và vectơ $\overrightarrow{M_0M}$ như trên Hình 64a hoặc 64b. Ta có

$$\tan\varphi = \frac{\overline{HM}}{\overline{M_0H}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Hình 64

Khi M dần tới M_0 ($M \to M_0$) thì $\Delta x \to 0$ và ngược lại.

Theo giả thiết, $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 nên tồn tại giới hạn

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{M \to M_0} \tan\varphi.$$

Vậy khi $M \to M_0$ thì cát tuyến M_0M dần tới vị trí giới hạn là đường thẳng M_0T, có hệ số góc bằng $\lim\limits_{M \to M_0} \tan\varphi = f'(x_0)$.

Đường thẳng M_0T là tiếp tuyến tại M_0 của (C).

Vậy $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại M_0 của đồ thị (C). ■

c) Phương trình tiếp tuyến

4

Viết phương trình đường thẳng đi qua $M_0(x_0\,;\,y_0)$ và có hệ số góc k.

Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

> Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0\,;f(x_0))$ là
>
> $$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$
>
> trong đó $y_0 = f(x_0)$.

5

Cho hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$. Tính $y'(2)$ bằng định nghĩa.

Ví dụ 2. Cho parabol $y = -x^2 + 3x - 2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

Giải. Bằng định nghĩa ta tính được $y'(2) = -1$. Do đó, hệ số góc của tiếp tuyến là -1. Ngoài ra ta có $y(2) = 0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm $M_0(2\,;\,0)$ là

$$y - 0 = (-1).(x - 2) \text{ hay } y = -x + 2. \ ■$$

6. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

a) Vận tốc tức thời

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, với $s = s(t)$ là một hàm số có đạo hàm. Như đã thấy trong bài toán mở đầu, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại t_0 :

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

b) Cường độ tức thời

Nếu điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian : $Q = Q(t)$ ($Q = Q(t)$ là một hàm số có đạo hàm) thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $Q = Q(t)$ tại t_0 :

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

II – ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

6

Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số :

a) $f(x) = x^2$ tại điểm x bất kì ;   b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ tại điểm bất kì $x \neq 0$.

ĐỊNH NGHĨA

> Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó, ta gọi hàm số $f' : (a\ ;\ b) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a\ ;\ b)$, kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

Ví dụ 3. Hàm số $y = x^2$ có đạo hàm $y' = 2x$ trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

Hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ có đạo hàm $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ +\infty)$.

BÀI ĐỌC THÊM

ĐẠO HÀM MỘT BÊN

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Có thể không tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

nhưng tồn tại các giới hạn một bên

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Khi đó, ta nói hàm số có đạo hàm một bên.

ĐỊNH NGHĨA 1

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) bên phải

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

ta sẽ gọi giới hạn đó là ***đạo hàm bên phải*** của hàm số $y=f(x)$ tại $x=x_0$ và kí hiệu là $f'(x_0^+)$.

Tương tự, giới hạn (hữu hạn) bên trái (nếu tồn tại)

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

được gọi là ***đạo hàm bên trái*** của hàm số $y=f(x)$ tại $x=x_0$ và kí hiệu là $f'(x_0^-)$.

Các đạo hàm bên phải và bên trái được gọi chung là ***đạo hàm một bên***.

Từ các tính chất của giới hạn một bên suy ra ngay định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó, ta có

$$f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0).$$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

có các đạo hàm một bên, nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Giải. Ta có :

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0\ ;$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Vậy tại $x_0 = 0$, hàm số này có đạo hàm bên phải bằng 0, đạo hàm bên trái bằng -1. Vì các đạo hàm bên phải và bên trái khác nhau nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$. ■

Ví dụ 2. Xét sự tồn tại đạo hàm và các đạo hàm một bên của hàm số

$$f(x)=\begin{cases} -\sqrt[5]{x^4} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

tại điểm $x = 0$.

Giải. Vì

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sqrt[5]{x^4}-0}{x-0} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = -\infty$$

nên hàm số không có đạo hàm bên phải tại $x = 0$.

Vì

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{x} = 2$$

nên hàm số có đạo hàm bên trái tại $x = 0$ và $f'(0^-) = 2$.

Từ định lí suy ra rằng hàm số đã cho không có đạo hàm tại $x = 0$. ■

ĐỊNH NGHĨA 2

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có ***đạo hàm trên đoạn*** $[a\ ;b]$ nếu thoả mãn các điều kiện sau :

Có đạo hàm tại mọi $x \in (a\ ;b)$;

Có đạo hàm bên phải tại $x = a$;

Có đạo hàm bên trái tại $x = b$.

Bài tập

1. Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^3$, biết rằng :

a) $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$;

b) $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$.

2. Tính Δy và $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và Δx :

a) $y = 2x - 5$;   b) $y = x^2 - 1$;

c) $y = 2x^3$;   d) $y = \dfrac{1}{x}$.

3. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra :

a) $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = \dfrac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$;

c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 0$.

4. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nhưng có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$:

a) Tại điểm $(-1 ; -1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2 ;

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

6. Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \dfrac{1}{x}$:

a) Tại điểm $\left(\dfrac{1}{2} ; 2\right)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng -1 ;

c) Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$.

7. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9{,}8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.

a) Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5$ s) đến $t + \Delta t$, trong các trường hợp $\Delta t = 0{,}1$ s ; $\Delta t = 0{,}05$ s ; $\Delta t = 0{,}001$ s.

b) Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$ s.