§1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

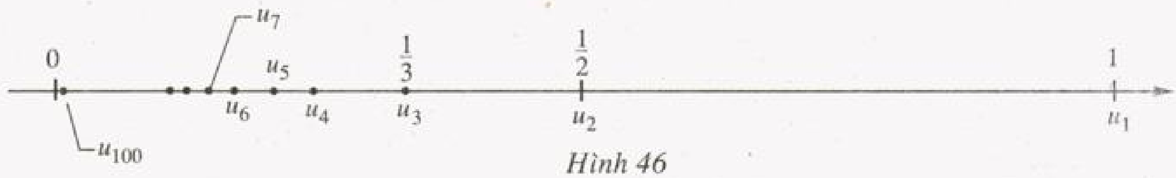
1. Định nghĩa

1

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Biểu diễn (u_n) dưới dạng khai triển : $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, ..., \dfrac{1}{100}, ...$

Biểu diễn (u_n) trên trục số (h.46) :



Hình 46

a) Nhận xét xem khoảng cách từ u_n tới 0 thay đổi thế nào khi n trở nên rất lớn.

b) Bắt đầu từ số hạng u_n nào của dãy số thì khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,01 ? 0,001 ?

(Ta cũng chứng minh được rằng $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $|u_n|$ có thể nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là chọn n đủ lớn. Khi đó, ta nói dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n}$ có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực).

ĐỊNH NGHĨA 1

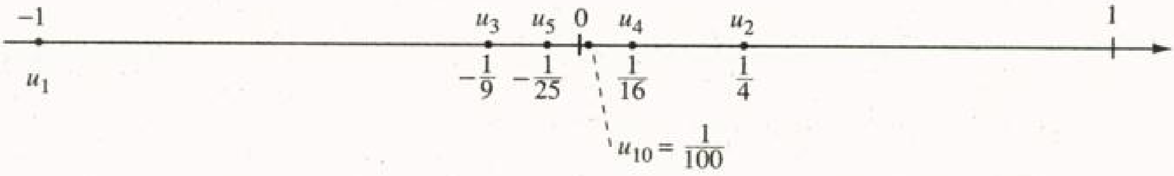
Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn là 0*** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Như vậy, (u_n) có giới hạn là 0 khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Biểu diễn (u_n) trên trục số (h.47) :



Hình 47

Người ta chứng minh được rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, nghĩa là $|u_n|$ có thể *nhỏ hơn một số dương bất kì*, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Chẳng hạn :

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < 0{,}01 \text{ hay } |u_n| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{100}$$

với mọi n thoả mãn $n^2 > 100$ hay $n > 10$.

Nói cách khác, $|u_n| < 0{,}01$ kể từ số hạng thứ 11 trở đi.

Tương tự,

$$|u_n| = \frac{1}{n^2} < 0{,}000\,01 \text{ hay } |u_n| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{100000}$$

với mọi n thoả mãn $n^2 > 100\,000$ hay $n > \sqrt{100\,000} \approx 316{,}2$.

Vậy $|u_n| < 0{,}000\,01$ kể từ số hạng thứ 317 trở đi.

ĐỊNH NGHĨA 2

> Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là số a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - a) = 0$.
>
> Kí hiệu : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 2. Cho dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - 2) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n} - 2 \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2.$ ■

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Từ định nghĩa suy ra các kết quả sau :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương ;

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} c = c$.

CHÚ Ý

Từ nay về sau thay cho $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II – ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Việc tìm giới hạn bằng định nghĩa khá phức tạp nên người ta thường áp dụng các công thức giới hạn đặc biệt nêu trên và định lí sau đây mà ta thừa nhận.

ĐỊNH LÍ 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì

$$a \geq 0 \text{ và } \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$$

Ví dụ 3. Tìm $\lim \dfrac{3n^2 - n}{1 + n^2}$.

Giải. Chia tử số và mẫu số cho n^2, ta được $\dfrac{3n^2 - n}{1 + n^2} = \dfrac{3 - \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{n} + 1}$.

Vì $\lim\left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = \lim 3 - \lim\dfrac{1}{n} = 3 - 0 = 3$

và $\lim\left(\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{n} + 1\right) = \lim\dfrac{1}{n}.\lim\dfrac{1}{n} + \lim 1 = 0.0 + 1 = 1$

nên $\lim\dfrac{3n^2 - n}{1 + n^2} = \lim\dfrac{3 - \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{n} + 1} = \dfrac{\lim\left(3 - \dfrac{1}{n}\right)}{\lim\left(\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{n} + 1\right)} = \dfrac{3}{1} = 3.$ ■

Ví dụ 4. Tìm $\lim\dfrac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n}$.

Giải. Ta có $\lim\dfrac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n} = \lim\dfrac{\sqrt{n^2\left(\dfrac{1}{n^2} + 4\right)}}{1 - 2n}$

$$= \lim\frac{n\sqrt{\dfrac{1}{n^2} + 4}}{n\left(\dfrac{1}{n} - 2\right)} = \lim\frac{\sqrt{\dfrac{1}{n^2} + 4}}{\dfrac{1}{n} - 2} = \frac{2}{-2} = -1.$$ ■

III – TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

• Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q| < 1$ được gọi là ***cấp số nhân lùi vô hạn***.

Chẳng hạn, hai dãy số sau là những cấp số nhân lùi vô hạn :

– Dãy số $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, ..., \dfrac{1}{2^n}, ...$ với công bội $q = \dfrac{1}{2}$;

– Dãy số $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ..., \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, ... với công bội $q = -\frac{1}{3}$.

• Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội q. Khi đó,

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} - \left(\frac{u_1}{1-q}\right).q^n.$$

Vì $|q| < 1$ nên $\lim q^n = 0$. Từ đó ta có

$$\lim S_n = \lim\left[\frac{u_1}{1-q} - \left(\frac{u_1}{1-q}\right)q^n\right] = \frac{u_1}{1-q}.$$

Giới hạn này được gọi là ***tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** (u_n) và được kí hiệu là $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$

Như vậy

$$\boxed{S = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1).}$$

Ví dụ 5

a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), với $u_n = \frac{1}{3^n}$.

b) Tính tổng $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + ...$

Giải

a) Vì $u_n = \frac{1}{3^n}$ nên $u_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$. Do đó

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^n} + ... = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

b) Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, $q = -\frac{1}{2}$.

Vậy $$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

$$= \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$ ■

IV – GIỚI HẠN VÔ CỰC

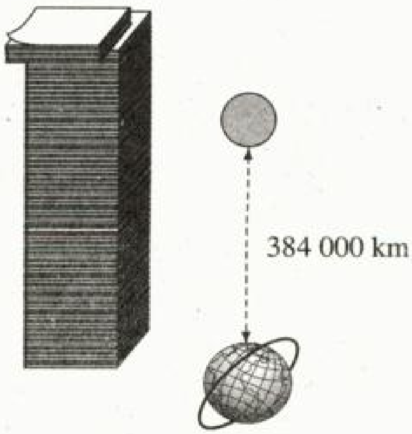
1. Định nghĩa

2

Có nhiều tờ giấy giống nhau, mỗi tờ có bề dày là 0,1mm. Ta xếp chồng liên tiếp tờ này lên tờ khác (h.48). Giả sử có thể thực hiện việc xếp giấy như vậy một cách vô hạn.

Gọi u_1 là bề dày của một tờ giấy, u_2 là bề dày của một xếp giấy gồm hai tờ, u_3 là bề dày của một xếp giấy gồm ba tờ, ..., u_n là bề dày của một chồng giấy gồm n tờ. Tiếp tục như vậy, ta có được dãy số vô hạn (u_n).

Bảng sau đây cho biết bề dày (tính theo mm) của một số chồng giấy.



Hình 48

u_1	...	u_{1000}	...	$u_{1000\,000}$	...	$u_{1000\,000\,000}$	...	u_n	...
0,1	...	100	...	100 000	...	100 000 000	...	$\frac{n}{10}$	...

a) Quan sát bảng trên và nhận xét về giá trị của u_n khi n tăng lên vô hạn.

b) Với n như thế nào thì ta đạt được những chồng giấy có bề dày lớn hơn khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt Trăng ? (Cho biết khoảng cách này ở một thời điểm xác định là 384 000 km hay 384.10^9 mm).

(Ta cũng chứng minh được rằng $u_n = \frac{n}{10}$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Khi đó, dãy số (u_n) nói trên được gọi là *dần tới dương vô cực*, khi $n \to +\infty$).

ĐỊNH NGHĨA

• Ta nói dãy số (u_n) *có giới hạn* $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu : $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

• Dãy số (u_n) được gọi là *có giới hạn* $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

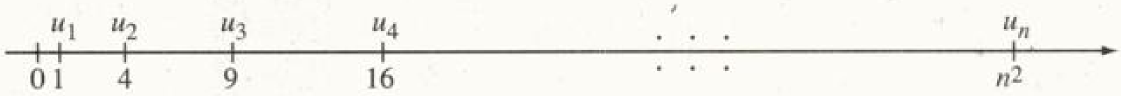
Kí hiệu : $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

NHẬN XÉT

$$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty.$$

Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2$.

Hình 49 cho một biểu diễn các số hạng của (u_n) trên trục số.



Hình 49

Biểu diễn hình học này cho thấy, khi n tăng lên vô hạn thì u_n trở nên rất lớn. Hơn nữa, người ta chứng minh được rằng $\lim u_n = +\infty$, nghĩa là u_n có thể ***lớn hơn một số dương bất kì***, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Chẳng hạn, $u_n > 10\,000$, hay $n^2 > 10\,000$ khi $n > 100$.

Vậy $u_n > 10\,000$ kể từ số hạng thứ 101 trở đi.

Tương tự, $u_n > 10^{20}$ hay $n^2 > 10^{20}$ khi $n > 10^{10}$.

Vậy $u_n > 10^{20}$ kể từ số hạng thứ $10^{10} + 1$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau :

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương ;

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3. Định lí

Ta thừa nhận định lí dưới đây.

ĐỊNH LÍ 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

Ví dụ 7. Tìm $\lim \dfrac{2n+5}{n.3^n}$.

Giải. Chia tử và mẫu cho n, ta được $\dfrac{2n+5}{n.3^n} = \dfrac{2+\dfrac{5}{n}}{3^n}$.

Vì $\lim\left(2+\dfrac{5}{n}\right) = 2$ và $\lim 3^n = +\infty$ nên

$$\lim \frac{2n+5}{n.3^n} = \lim \frac{2+\dfrac{5}{n}}{3^n} = 0. \blacksquare$$

Ví dụ 8. Tìm $\lim(n^2 - 2n - 1)$.

Giải. Ta có $n^2 - 2n - 1 = n^2\left(1 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim\left(1 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = 1 > 0$ nên

$$\lim n^2\left(1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = +\infty.$$

Vậy $\lim(n^2 - 2n - 1) = +\infty$. $\blacksquare$

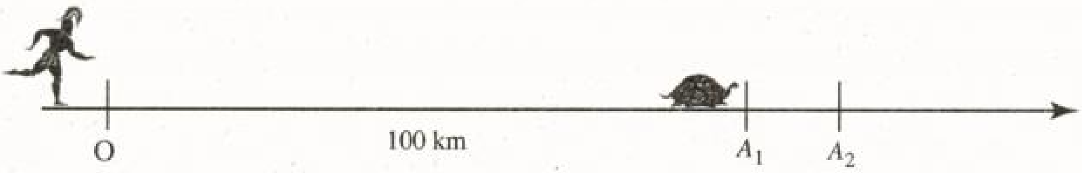
BÀI ĐỌC THÊM

QUAY VỀ NGHỊCH LÍ ZÊ-NÔNG

Sau khi đã học về giới hạn của dãy số, ta có thể giải thích như thế nào về nghịch lí "A-sin không đuổi kịp rùa" ?

Để đơn giản, ở đây ta chỉ xét một trường hợp cụ thể (trường hợp tổng quát được giải quyết tương tự).

Giả sử tốc độ chạy của A-sin là 100 km/h, còn tốc độ chạy của rùa là 1 km/h. Lúc xuất phát, rùa ở điểm A_1 cách A-sin 100 km (h.50).



Hình 50

Ta tính thời gian A-sin đuổi rùa, bằng cách tính tổng thời gian A-sin chạy hết các quãng đường OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, ... Nếu tổng này vô hạn thì A-sin không thể đuổi kịp được rùa, còn nếu nó hữu hạn thì đó chính là thời gian mà A-sin đuổi kịp rùa.

Để chạy hết quãng đường $OA_1 = 100$(km), A-sin phải mất thời gian $t_1 = \frac{100}{100} = 1$(h).

Với thời gian t_1 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_1A_2 = 1$(km).

Để chạy hết quãng đường $A_1A_2 = 1$(km), A-sin phải mất thời gian $t_2 = \frac{1}{100}$(h). Với thời gian t_2 rùa đã chạy thêm được quãng đường $A_2A_3 = \frac{1}{100}$ (km).

Tiếp tục như vậy, để chạy hết quãng đường $A_{n-1}A_n = \frac{1}{100^{n-2}}$ (km), A-sin phải mất thời gian $t_n = \frac{1}{100^{n-1}}$ (h).

Vậy tổng thời gian A-sin chạy hết các quãng đường $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, ...$ là

$$T = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + ... + \frac{1}{100^n} + ... \text{ (h)}$$

Đó là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, công bội $q = \frac{1}{100}$, nên ta có

$$T = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99} \text{ (h)}.$$

Như vậy, A-sin đuổi kịp rùa sau $1\frac{1}{99}$ giờ.

Kết quả trên (đạt được nhờ áp dụng khái niệm giới hạn) cho phép giải thích nghịch lí của Zê-nông.

Bài tập

1. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian T = 24 000 năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khoẻ của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, cho biết chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6}g.

2. Biết dãy số (u_n) thoả mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$.

3. Tìm các giới hạn sau :

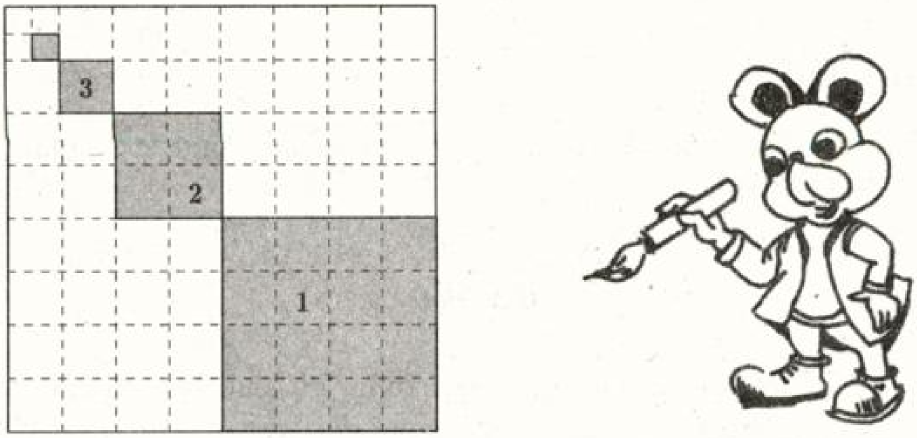
a) $\lim \frac{6n - 1}{3n + 2}$;

b) $\lim \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1}$;

c) $\lim \frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n}$;

d) $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$.

4. Để trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột Mickey quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1. Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, ..., n, ..., trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó (h.51).



Hình 51

Giả sử quy trình tô màu của Mickey có thể tiến ra vô hạn.

a) Gọi u_n là diện tích của hình vuông màu xám thứ n. Tính u_1, u_2, u_3 và u_n.

b) Tính $\lim S_n$ với $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

5. Tính tổng $S = -1 + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10^2} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \ldots$

6. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 1{,}020\,202\ldots$ (chu kì là 02). Hãy viết a dưới dạng một phân số.

7. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1)$;

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2)$;

c) $\lim\left(\sqrt{n^2 - n} - n\right)$;

d) $\lim(\sqrt{n^2 - n} + n)$.

8. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Biết $\lim u_n = 3$, $\lim v_n = +\infty$.

Tính các giới hạn :

a) $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$;

b) $\lim \dfrac{v_n + 2}{v_n^2 - 1}$.