§2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

1

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-2x}{x-1}$.

1. Cho biến x những giá trị khác 1 lập thành dãy số (x_n), $x_n \to 1$ như trong bảng sau :

x	$x_1=2$	$x_2=\dfrac{3}{2}$	$x_3=\dfrac{4}{3}$	$x_4=\dfrac{5}{4}$	...	$x_n=\dfrac{n+1}{n}$	...	$\longrightarrow 1$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	...	$f(x_n)$	...	$\longrightarrow ?$

Khi đó, các giá trị tương ứng của hàm số

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$$

cũng lập thành một dãy số mà ta kí hiệu là $(f(x_n))$.

a) Chứng minh rằng $f(x_n)=2x_n=\dfrac{2n+2}{n}$.

b) Tìm giới hạn của dãy số $(f(x_n))$.

2. Chứng minh rằng với dãy số bất kì (x_n), $x_n \neq 1$ và $x_n \to 1$, ta luôn có $f(x_n) \to 2$.

(Với tính chất thể hiện trong câu 2, ta nói hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-2x}{x-1}$ có giới hạn là 2 khi x dần tới 1).

Dưới đây, thay cho các khoảng $(a\ ;\ b)$, $(-\infty\ ;\ b)$, $(a\ ;\ +\infty)$ hoặc $(-\infty\ ;\ +\infty)$, ta viết chung là khoảng K.

ĐỊNH NGHĨA 1

> Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.
>
> Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.
>
> Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$.

Giải. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq -2$ và $x_n \to -2$ khi $n \to +\infty$. Ta có

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim \frac{(x_n + 2)(x_n - 2)}{(x_n + 2)} = \lim(x_n - 2) = -4.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$. ■

(Lưu ý rằng, mặc dù $f(x)$ không xác định tại $x = -2$, nhưng hàm số lại có giới hạn là -4 khi $x \to -2$).

NHẬN XÉT

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0\ ;\ \lim_{x \to x_0} c = c, \text{ với } c \text{ là hằng số.}$$

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

a) Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, thì

$$L \geq 0 \text{ và } \lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

(Dấu của *f(x)* được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$).

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$. Tìm $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Giải. Theo Định lí 1 ta có

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 1)}{\lim\limits_{x \to 3} 2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} 1}{\lim\limits_{x \to 3} 2 . \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x . \lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 1}{\lim\limits_{x \to 3} 2 . \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} x}} = \frac{3.3 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}. \blacksquare$$

Ví dụ 3. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Giải. Vì $(x - 1) \to 0$ khi $x \to 1$, nên ta chưa thể áp dụng Định lí 1 nêu trên.

Nhưng với $x \neq 1$ ta có $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = x + 2$.

Do đó,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 3. \blacksquare$$

3. Giới hạn một bên

Trong Định nghĩa 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$, ta xét dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$. Giá trị x_n có thể lớn hơn hay nhỏ hơn x_0.

Nếu ta chỉ xét các dãy (x_n) mà x_n luôn lớn hơn x_0 (hay luôn nhỏ hơn x_0), thì ta có định nghĩa giới hạn một bên như dưới đây.

ĐỊNH NGHĨA 2

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0\ ;\ b)$.

Số L được gọi là ***giới hạn bên phải*** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ x_0)$.

Số L được gọi là ***giới hạn bên trái*** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $$f(x) = \begin{cases} 5x + 2 \text{ nếu } x \geq 1 & (1) \\ x^2 - 3 \text{ nếu } x < 1. & (2) \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (nếu có).

Giải. Ta có, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 3) = 1^2 - 3 = -2$;

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (5x + 2) = 5.1 + 2 = 7.$

Như vậy, khi x dần tới 1 hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bên trái là -2 và giới hạn bên phải là 7. Tuy nhiên, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại vì $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. ■

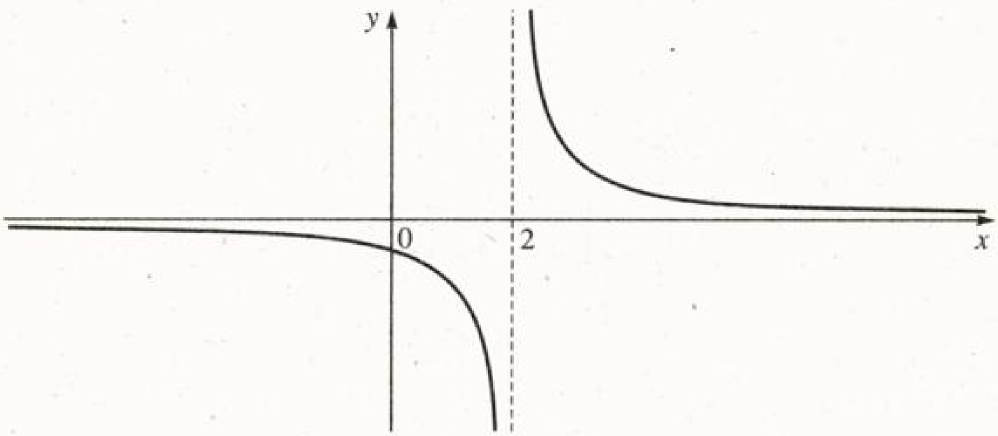
2

Trong biểu thức (1) xác định hàm số $y = f(x)$ ở Ví dụ 4, cần thay số 2 bằng số nào để hàm số có giới hạn là -2 khi $x \to 1$?

II – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

3

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ có đồ thị như ở Hình 52



Hình 52

Quan sát đồ thị và cho biết :

– Khi biến x dần tới dương vô cực, thì $f(x)$ dần tới giá trị nào.

– Khi biến x dần tới âm vô cực, thì $f(x)$ dần tới giá trị nào.

ĐỊNH NGHĨA 3

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty\ ; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Giải. Hàm số đã cho xác định trên $(-\infty\ ; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.

• Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thoả mãn $x_n < 1$ và $x_n \to -\infty$.

$$\text{Ta có } \lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n + 3}{x_n - 1} = \lim \frac{2 + \dfrac{3}{x_n}}{1 - \dfrac{1}{x_n}} = 2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2.$$

• Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thoả mãn $x_n > 1$ và $x_n \to +\infty$.

$$\text{Ta có } \lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n + 3}{x_n - 1} = \lim \frac{2 + \dfrac{3}{x_n}}{1 - \dfrac{1}{x_n}} = 2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2.$$ ■

CHÚ Ý

a) Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có :

$$\lim_{x \to +\infty} c = c \; ; \; \lim_{x \to -\infty} c = c \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^k} = 0 \; ; \; \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

b) Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

Giải. Chia cả tử và mẫu cho x^2, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3. \; ■$$

III – GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa 1, 2 hay 3 ở trên.

Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới dương vô cực được định nghĩa như dưới đây.

ĐỊNH NGHĨA 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a \; ; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$.

NHẬN XÉT

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (-f(x)) = -\infty.$$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn.

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

Định lí về giới hạn của tích và thương hai hàm số chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn.

Sau đây là một vài quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$		+	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$).

CHÚ Ý

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Ví dụ 7. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 2x)$.

Giải. Ta có $(x^3 - 2x) = x^3\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$. ■

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2x - 3}{x - 1}$;

b) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2x - 3}{x - 1}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} (x - 1) = 0$, $x - 1 < 0$ với mọi $x < 1$ và

$$\lim_{x\to1^-} (2x - 3) = 2.1 - 3 = -1 < 0.$$

Do đó, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$, $x - 1 > 0$ với mọi $x > 1$ và

$$\lim_{x\to 1^+} (2x-3) = 2.1 - 3 = -1 < 0.$$

Do đó, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$. ■

Bài tập

1. Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+1}{3x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$.

2. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

và các dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n}$, (v_n) với $v_n = -\dfrac{1}{n}$.

Tính $\lim u_n, \lim v_n, \lim f(u_n)$ và $\lim f(v_n)$.

Từ đó có kết luận gì về giới hạn của hàm số đã cho khi $x \to 0$?

3. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-1}{x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-6}{4-x}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{17}{x^2+1}$;

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}$.

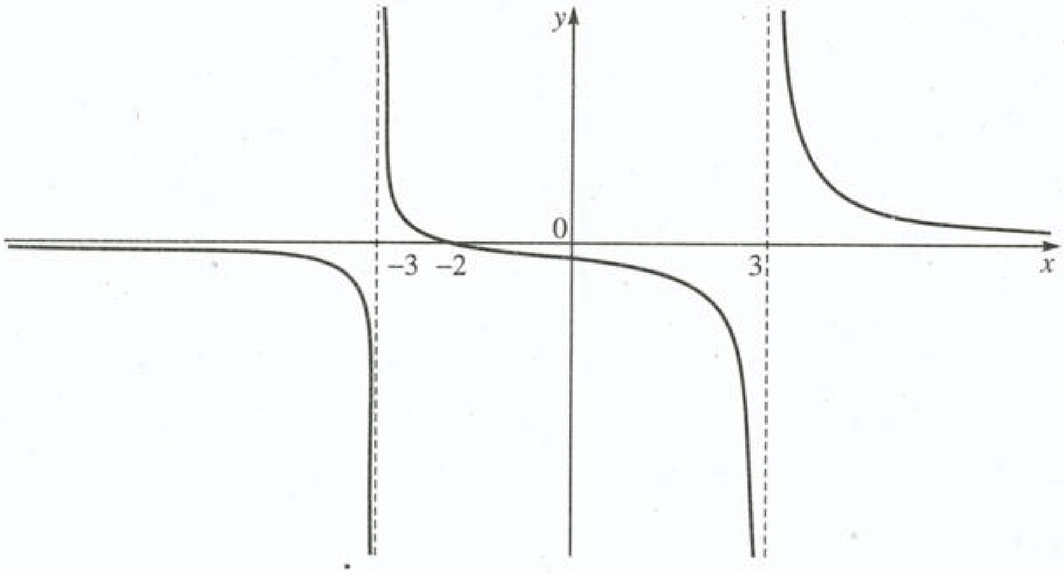
4. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-5}{(x-2)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-7}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-7}{x-1}$.

5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$ có đồ thị như trên Hình 53.



Hình 53

a) Quan sát đồ thị và nêu nhận xét về giá trị hàm số đã cho khi $x \to -\infty$, $x \to 3^-$ và $x \to -3^+$.

b) Kiểm tra các nhận xét trên bằng cách tính các giới hạn sau :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-\infty\ ; -3)$,
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-3\ ; 3)$,
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-3\ ; 3)$.

6. Tính :

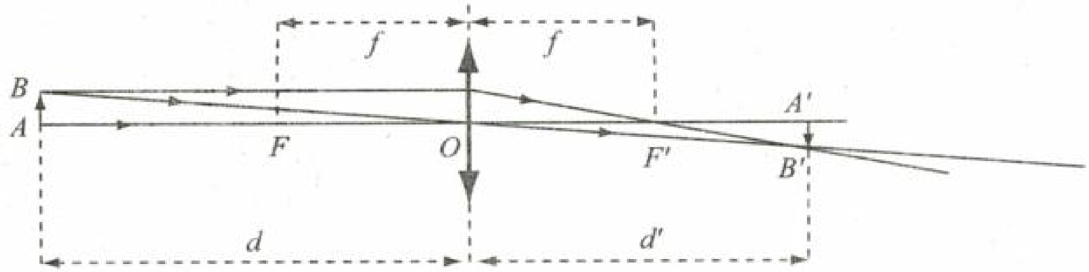
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5)$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{5 - 2x}$.

7. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính (h.54). Công thức thấu kính là $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'} = \dfrac{1}{f}$.

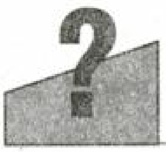


Hình 54

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b) Tìm $\lim\limits_{d \to f^+} \varphi(d)$, $\lim\limits_{d \to f^-} \varphi(d)$ và $\lim\limits_{d \to +\infty} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

BẠN CÓ BIẾT ?



Nhà bác học Anh Niu-tơn (Newton, 1642 – 1727) là người đầu tiên đề xuất thuật ngữ "giới hạn", dịch từ chữ La-tinh "Limes" có nghĩa là "bờ", "mép" hay "biên giới". Tuy nhiên, chính Giu-rin (Jurin, 1684 – 1750), sau đó Rô-bin (Robins, 1697 – 1751), Cô-si (Cauchy, 1789 – 1857) ... mới đưa ra các định nghĩa về khái niệm này.

Nhà toán học Đức Vai-ơ-xtrát (Weierstrass) đã trình bày một định nghĩa hiện đại về khái niệm giới hạn, gần giống với định nghĩa sau đây mà ngày nay vẫn thường được dùng trong toán học.

"Số b được gọi là giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to a$, nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $x \neq a$ và $|x - a| < \delta$ thì bất đẳng thức $|f(x) - b| < \varepsilon$ được thực hiện." (Từ điển toán học NXB KH&KT 1993).

Kí hiệu "lim" mà ta dùng ngày nay là do nhà toán học Thuỵ Sĩ Luy-lơ (L'Huiller, 1750 – 1840) đưa ra vào năm 1786.

Như vậy, khái niệm Giới hạn chỉ mới ra đời ở thế kỉ XVII. Tuy nhiên, tư tưởng "giới hạn" đã xuất hiện rất sớm ở nhiều nhà bác học thời cổ đại.

Weierstrass
(1815 – 1897)