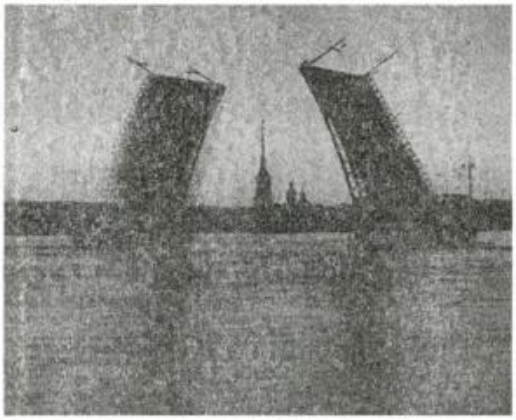
§3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

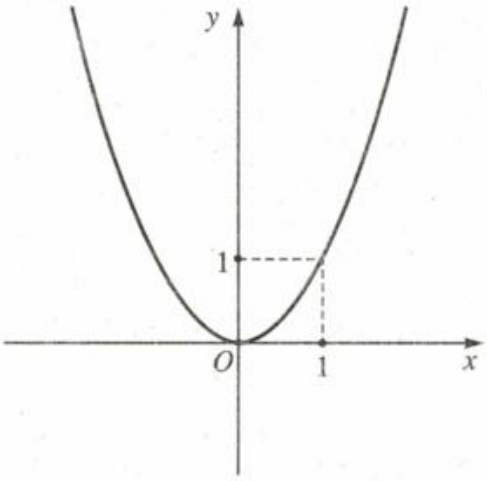


Cầu Đvor-so-vưi ở Xanh Pê-téc-bua (Nga) đang mở ra cho tàu qua lại.

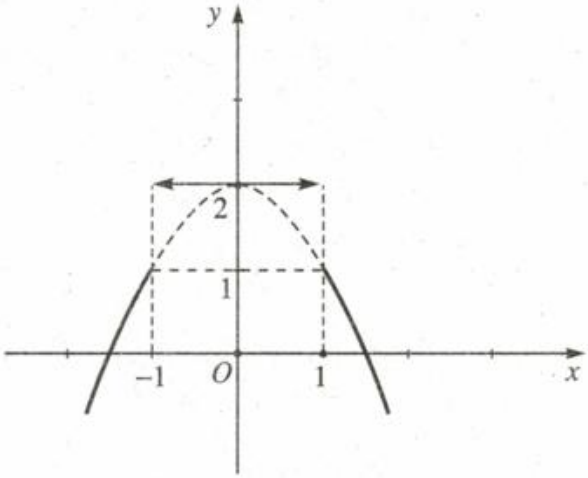
I – HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

1

Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 \text{ nếu } x \le -1 \\ 2 \qquad \text{nếu } -1 < x < 1 \\ -x^2 + 2 \text{ nếu } x \ge 1 \end{cases}$ có đồ thị như Hình 55.



Đồ thị hàm số $y = f(x)$



Đồ thị hàm số $y = g(x)$

Hình 55

a) Tính giá trị của mỗi hàm số tại $x = 1$ và so sánh với giới hạn (nếu có) của hàm số đó khi $x \to 1$;

b) Nêu nhận xét về đồ thị của mỗi hàm số tại điểm có hoành độ $x = 1$.

(Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục* tại $x = 1$ và hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại điểm này).

ĐỊNH NGHĨA 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***liên tục*** tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là ***gián đoạn*** tại điểm đó.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ tại $x_0 = 3$.

Giải. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, do đó xác định trên khoảng $(2 ; +\infty)$ chứa $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x}{x-2} = 3 = f(3).$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 3$. ■

II – HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

ĐỊNH NGHĨA 2

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

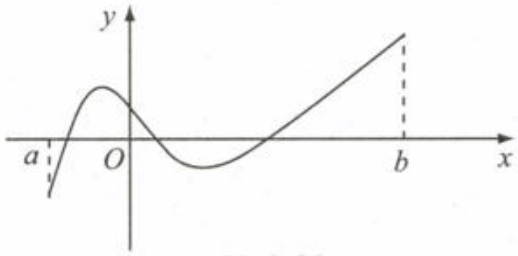
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***liên tục trên đoạn*** $[a ; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a ; b]$, $[a ; +\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự.

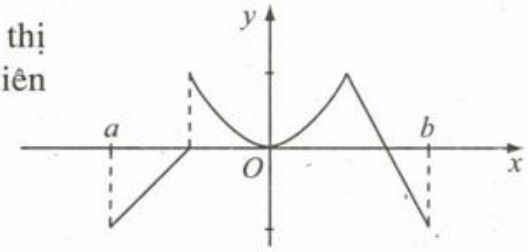
NHẬN XÉT

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó (h.56).



Hình 56

Hình 57 cho ví dụ về đồ thị của một hàm số không liên tục trên khoảng $(a ; b)$.



Hình 57

III – MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Ta thừa nhận các định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó :

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0 ;

b) Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 5 & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

Giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

• Nếu $x \neq 1$, thì $h(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty ; 1) \cup (1 ; +\infty)$.

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$.

• Nếu $x = 1$, ta có $h(1) = 5$ và

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2x = 2.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 1} h(x) \neq h(1)$, nên hàm số đã cho không liên tục tại $x = 1$.

Kết luận : Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ +\infty)$ và gián đoạn tại $x = 1$. ■

2

Trong biểu thức xác định $h(x)$ cho ở Ví dụ 2, cần thay số 5 bởi số nào để được một hàm số mới liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$?

3

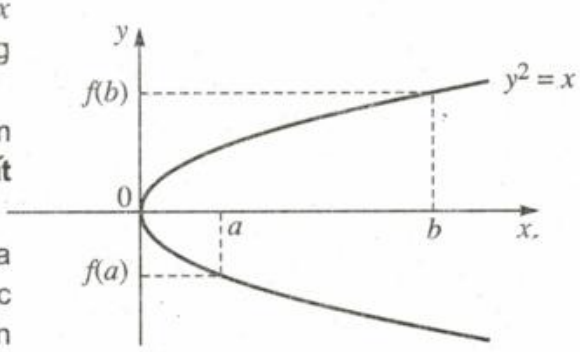
Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ với $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu nhau. Hỏi đồ thị của hàm số có cắt trục hoành tại điểm thuộc khoảng $(a\ ;\ b)$ không ?

• Bạn Hưng trả lời rằng : "Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phải cắt trục hoành Ox **tại một điểm duy nhất** nằm trong khoảng $(a\ ;\ b)$ ".

• Bạn Lan khẳng định : "Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phải cắt trục hoành Ox **ít nhất tại một điểm** nằm trong khoảng $(a\ ;\ b)$ ".

• Bạn Tuấn thì cho rằng : "Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có thể **không cắt** trục hoành trong khoảng $(a\ ;\ b)$, chẳng hạn như đường parabol ở hình (h.58).

Câu trả lời của bạn nào đúng, vì sao ?

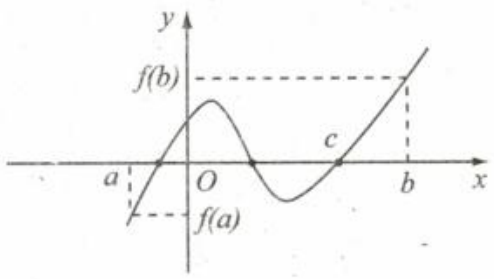


Hình 58

ĐỊNH LÍ 3

> Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a)f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a\ ;\ b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Minh hoạ bằng đồ thị (h.59).



Hình 59

Định lí 3 thường được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.

Có thể phát biểu Định lí 3 dưới một dạng khác như sau :

> Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a ; b)$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2x - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giải. Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 5$.

Ta có $f(0) = -5$ và $f(2) = 7$. Do đó, $f(0)f(2) < 0$.

$y = f(x)$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó, nó liên tục trên đoạn $[0 ; 2]$. Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0 ; 2)$. ■

CHÚ Ý

> Nếu nhận xét thêm rằng $f(1)f(2) = -14 < 0$ thì ta có thể kết luận phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(1 ; 2) \subset (0 ; 2)$.

4 Hãy tìm hai số a và b thoả mãn $1 < a < b < 2$, sao cho phương trình trong Ví dụ 3 ở trên có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a ; b)$.

BÀI ĐỌC THÊM

TÍNH GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

• Trong Ví dụ 3 ở phần III, §3, ta đã chứng minh được rằng phương trình $x^3 + 2x - 5 = 0$ có nghiệm x_0 thuộc khoảng $(0 ; 2)$. Giả sử rằng đó là nghiệm duy nhất của phương trình trên khoảng này.

Bằng cách áp dụng liên tiếp Định lí 3, ta có thể tìm được các giá trị gần đúng của nghiệm x_0. Ta làm như sau :

– Bước 1 : Lấy số $1 = \frac{0+2}{2}$. Ta có, $f(1) = -2$. So sánh dấu của $f(1)$ và dấu của giá trị hàm số tại hai đầu mút là $f(0)$ và $f(2)$, ta thấy : $f(1).f(2) = -2.7 < 0$. Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(1 ; 2)$. Như vậy, $x_0 \in (1 ; 2)$.

– Bước 2 : Lấy số $1,5 = \frac{1+2}{2}$. Ta có, $f(1,5) = 1,375$ và $f(1).f(1,5) = -2.1,375 < 0$.

Do đó, $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(1 ; 1,5)$. Như vậy, $x_0 \in (1 ; 1,5)$.

– Bước 3 : Lấy số $1,25 = \frac{1+1,5}{2}$. Ta có, $f(1,25) = -0,546\ 875$ và $f(1,25).f(1,5) < 0$.

Do đó, $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(1,25 ; 1,5)$. Như vậy, $x_0 \in (1,25 ; 1,5)$.

Bảng sau đây trình bày kết quả tính lần lượt của các bước 4, 5, 6, 7.

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	Nghiệm x_0
1,25	1,5	1,375	– 0,546 875	1,375	0,349609375	$1,25 < x_0 < 1,375$
1,25	1,375	1,3125	– 0,546 875	0,349609375	– 0,114013671875	$1,3125 < x_0 < 1,375$
1,3125	1,375	1,34375	–0,114013671875	0,349609375	0,113861083984375	$1,3125 < x_0 < 1,34375$
1,3125	1,34375	1,328125	–0,114013671875	0,113861083984375	–0,001049041748046875	$1,328125 < x_0 < 1,34375$

Nếu dừng ở bước 4, ta có $1,25 < x_0 < 1,375$. Như vậy, có thể có được các giá trị gần đúng của nghiệm x_0. Chẳng hạn $\frac{1,25+1,375}{2}$ là một giá trị gần đúng của x_0 với sai số tuyệt đối $\Delta < |1,375 - 1,25| = 0,125$.

Khi dừng ở bước 7, ta có $1,328125 < x_0 < 1,343\ 75$. Có thể lấy $x_0 \approx 1,335\ 937\ 5$ với sai số tuyệt đối $\Delta < |1,343\ 75 - 1,328\ 125| = 0,015\ 625$.

Nếu tiếp tục quy trình trên, ta tìm được những giá trị gần đúng của x_0 với sai số càng ngày càng bé.

Chú ý. Trong quá trình tính toán, nếu có số $\frac{a+b}{2}$ nào đó mà $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, thì kết luận nghiệm $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

• Việc tìm giá trị gần đúng của nghiệm như trên sẽ dễ dàng hơn nếu sử dụng máy tính bỏ túi. Đặc biệt, máy tính bỏ túi có chức năng lập trình hay máy vi tính có thể cho phép tính một cách tự động và nhanh chóng giá trị gần đúng của nghiệm với sai số Δ rất bé.

Bài tập

1. Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tại $x_0 = 3$.

2. a) Xét tính liên tục của hàm số $y = g(x)$ tại $x_0 = 2$, biết

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2. \end{cases}$$

b) Trong biểu thức xác định g(x) ở trên, cần thay số 5 bởi số nào để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{nếu } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{nếu } x \geq -1. \end{cases}$

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Từ đó nêu nhận xét về tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

b) Khẳng định nhận xét trên bằng một chứng minh.

4. Cho các hàm số $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x - 6}$ và $g(x) = \tan x + \sin x$.

Với mỗi hàm số, hãy xác định các khoảng trên đó hàm số liên tục.

5. Ý kiến sau đúng hay sai ?

"*Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0, thì $y = f(x) + g(x)$ là một hàm số không liên tục tại x_0.*"

6. Chứng minh rằng phương trình :

a) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm ;

b) $\cos x = x$ có nghiệm.