§1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I – ĐỊNH NGHĨA

Trước hết, ta nhắc lại bảng các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.

Cung / Giá trị lượng giác	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$
$\cot x$	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1

a) Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính $\sin x$, $\cos x$ với x là các số sau :

$$\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{4}\,;\,1{,}5\,;\,2\,;\,3{,}1\,;\,4{,}25\,;\,5.$$

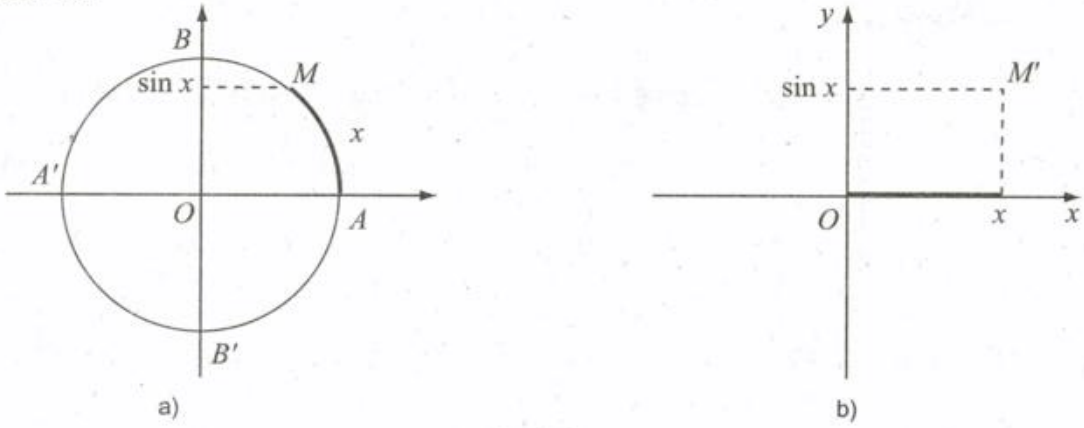
b) Trên đường tròn lượng giác, với điểm gốc A, hãy xác định các điểm M mà số đo của cung $\overset{\frown}{AM}$ bằng x (rad) tương ứng đã cho ở trên và xác định $\sin x$, $\cos x$ (lấy $\pi \approx 3{,}14$).

1. Hàm số sin và hàm số côsin

a) Hàm số sin

Ở lớp 10 ta đã biết, có thể đặt tương ứng mỗi số thực x với một điểm M duy nhất trên đường tròn lượng giác mà số đo của cung $\overset{\frown}{AM}$ bằng x (rad) (h.1a). Điểm M có tung độ hoàn toàn xác định, đó chính là giá trị $\sin x$.

Biểu diễn giá trị của x trên trục hoành và giá trị của $\sin x$ trên trục tung, ta được Hình 1b.



Hình 1

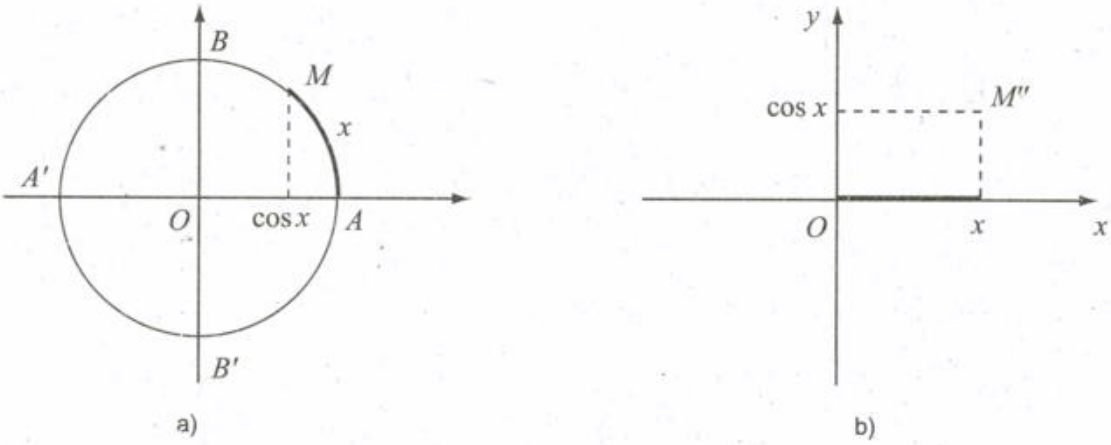
Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \sin x$$

được gọi là ***hàm số sin***, kí hiệu là $y = \sin x$.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số côsin



Hình 2

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \cos x$$

được gọi là ***hàm số côsin***, kí hiệu là $y = \cos x$ (h.2).

Tập xác định của hàm số côsin là $\mathbb{R}$.

2. Hàm số tang và hàm số côtang

a) Hàm số tang

> Hàm số ***tang*** là hàm số được xác định bởi công thức
>
> $$y = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (\cos x \neq 0),$$
>
> kí hiệu là $y = \tan x$.

Vì $\cos x \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ nên tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Hàm số côtang

> Hàm số ***côtang*** là hàm số được xác định bởi công thức
>
> $$y = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\sin x \neq 0),$$
>
> kí hiệu là $y = \cot x$.

Vì $\sin x \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ nên tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

2

Hãy so sánh các giá trị $\sin x$ và $\sin(-x)$, $\cos x$ và $\cos(-x)$.

NHẬN XÉT

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, từ đó suy ra các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ đều là những hàm số lẻ.

II – TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

3

Tìm những số T sao cho $f(x+T) = f(x)$ với mọi x thuộc tập xác định của các hàm số sau :

a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \tan x$.

Người ta chứng minh được rằng $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn đẳng thức

$$\sin(x + T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (xem } \textit{Bài đọc thêm}\text{).}$$

Hàm số $y = \sin x$ thoả mãn đẳng thức trên được gọi là ***hàm số tuần hoàn*** với ***chu kì*** 2π.

Tương tự, hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ cũng là những hàm số tuần hoàn, với chu kì π.

III – SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số $y = \sin x$

Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \sin x$:

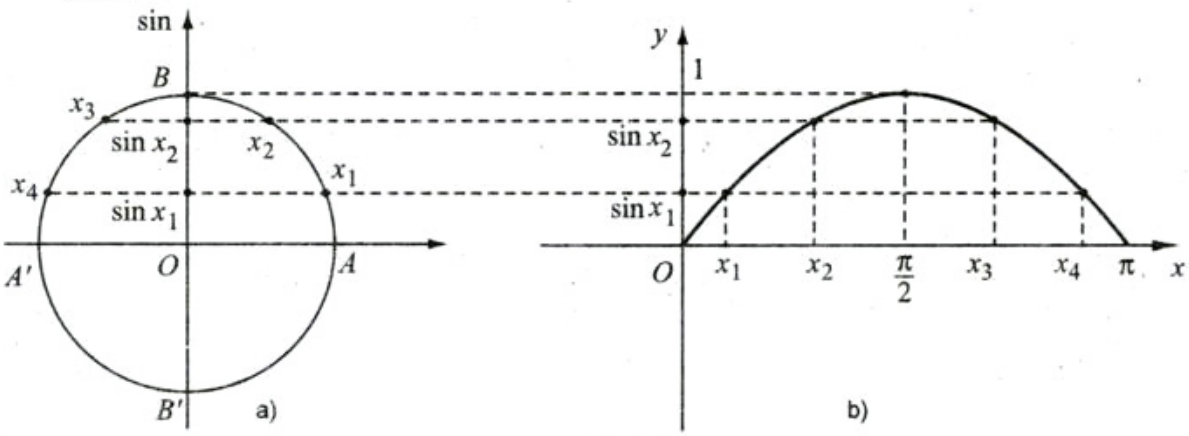
- Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \le \sin x \le 1$;
- Là hàm số lẻ ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Sau đây, ta sẽ khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \sin x$.

a) Sự biến thiên và đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$

Xét các số thực x_1, x_2, trong đó $0 \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$. Đặt $x_3 = \pi - x_2$, $x_4 = \pi - x_1$.

Biểu diễn chúng trên đường tròn lượng giác và xét $\sin x_i$ tương ứng ($i = 1, 2, 3, 4$) (h.3a).



Hình 3

Trên Hình 3 ta thấy, với x_1, x_2 tuỳ ý thuộc đoạn $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ và $x_1 < x_2$ thì $\sin x_1 < \sin x_2$.

Khi đó x_3, x_4 thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ và $x_3 < x_4$ nhưng $\sin x_3 > \sin x_4$.

Vậy hàm số $y = \sin x$ *đồng biến* trên $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ và *nghịch biến* trên $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

Bảng biến thiên :

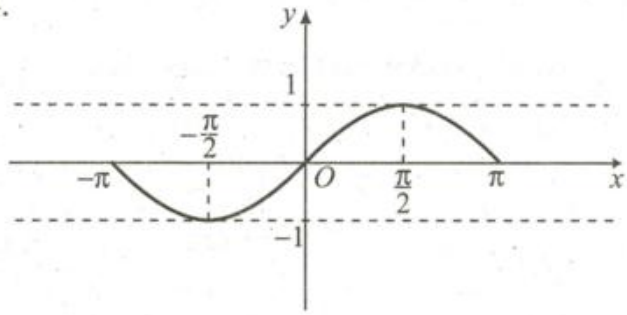
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y = \sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$ đi qua các điểm $(0 ; 0)$, $(x_1 ; \sin x_1)$, $(x_2 ; \sin x_2)$, $\left(\frac{\pi}{2} ; 1\right)$, $(x_3 ; \sin x_3)$, $(x_4 ; \sin x_4)$, $(\pi ; 0)$ (h.3b).

CHÚ Ý

Vì $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên lấy đối xứng đồ thị hàm số trên đoạn $[0 ; \pi]$ qua gốc toạ độ O, ta được đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi ; 0]$.

Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ được biểu diễn trên Hình 4.



Hình 4

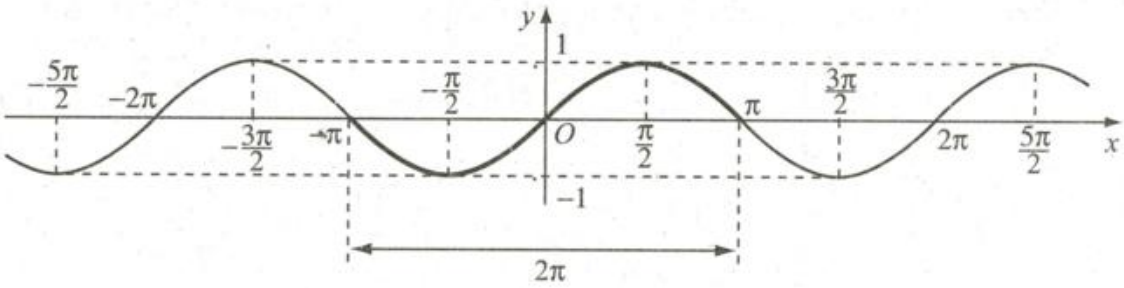
b) Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π nên với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó, muốn có đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$, ta tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ theo các vectơ $\vec{v} = (2\pi ; 0)$ và $-\vec{v} = (-2\pi ; 0)$, nghĩa là tịnh tiến song song với trục hoành từng đoạn có độ dài 2π.

Hình 5 dưới đây là đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$.



Hình 5

c) Tập giá trị của hàm số $y = \sin x$

Từ đồ thị ta thấy tập hợp mọi giá trị của hàm số $y = \sin x$ là đoạn $[-1 ; 1]$. Ta nói ***tập giá trị*** của hàm số này là $[-1 ; 1]$.

2. Hàm số $y = \cos x$

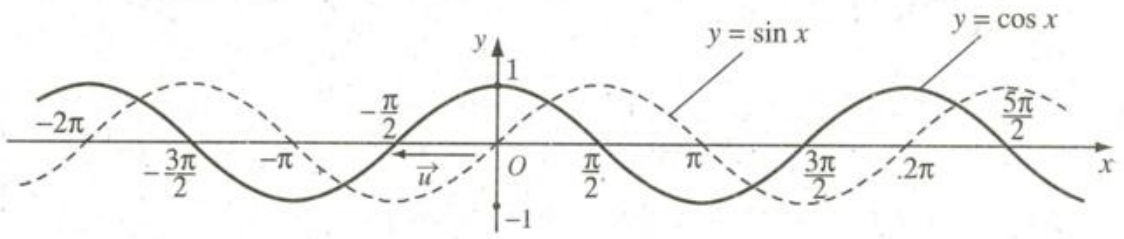
Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \cos x$:

- Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \leq \cos x \leq 1$;
- Là hàm số chẵn ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có đẳng thức

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Từ đó, bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ theo vectơ $\vec{u} = \left(-\frac{\pi}{2} ; 0\right)$ (sang trái một đoạn có độ dài bằng $\frac{\pi}{2}$, song song với trục hoành), ta được đồ thị của hàm số $y = \cos x$ (h.6).



Hình 6

Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên Hình 6, ta suy ra :

Hàm số $y = \cos x$ *đồng biến* trên đoạn $[-\pi ; 0]$ và *nghịch biến* trên đoạn $[0 ; \pi]$.

Bảng biến thiên :

x	$-\pi$		0		π
$y = \cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $[-1 ; 1]$.

Đồ thị của các hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$ được gọi chung là các *đường hình sin*.

3. Hàm số $y = \tan x$

Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \tan x$:

- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
- Là hàm số lẻ ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Vì vậy, để xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$, ta chỉ cần xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lấy đối xứng qua gốc toạ độ O, ta được đồ thị hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$.

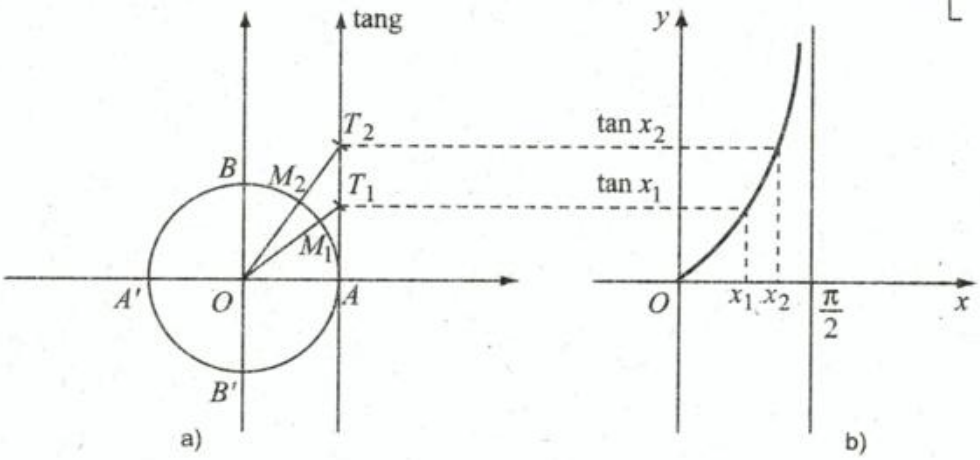
Cuối cùng, do tính tuần hoàn với chu kì π nên đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên D thu được từ đồ thị hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành từng đoạn có độ dài bằng π.

a) Sự biến thiên và đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

Từ biểu diễn hình học của $\tan x$ (h.7a), với $x_1, x_2 \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, $\overset{\curvearrowright}{AM_1} = x_1$, $\overset{\curvearrowright}{AM_2} = x_2$, $\overline{AT_1} = \tan x_1$, $\overline{AT_2} = \tan x_2$, ta thấy :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2.$$

Điều đó chứng tỏ rằng, hàm số $y = \tan x$ *đồng biến* trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.



Hình 7

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Để vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ ta làm như sau :

Tính giá trị của hàm số $y = \tan x$ tại một số điểm đặc biệt như $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$, ... rồi xác định các điểm $(0 ; \tan 0)$, $\left(\frac{\pi}{6} ; \tan\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4} ; \tan\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3} ; \tan\frac{\pi}{3}\right)$, ... Ta có bảng sau :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...
$y = \tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	...

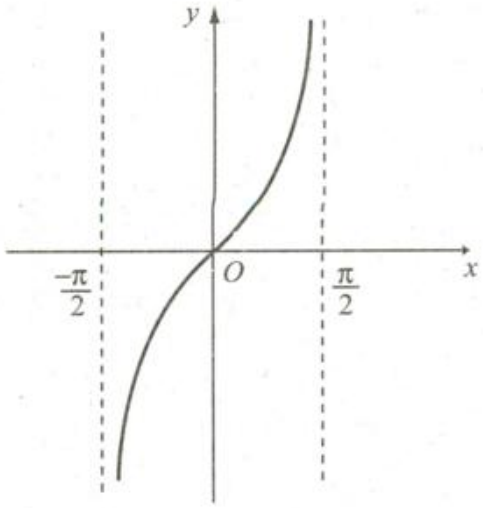
Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ đi qua các điểm tìm được.

Nhận xét rằng khi x càng gần $\frac{\pi}{2}$ thì đồ thị hàm số $y = \tan x$ càng gần đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ (h.7b).

b) Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên D

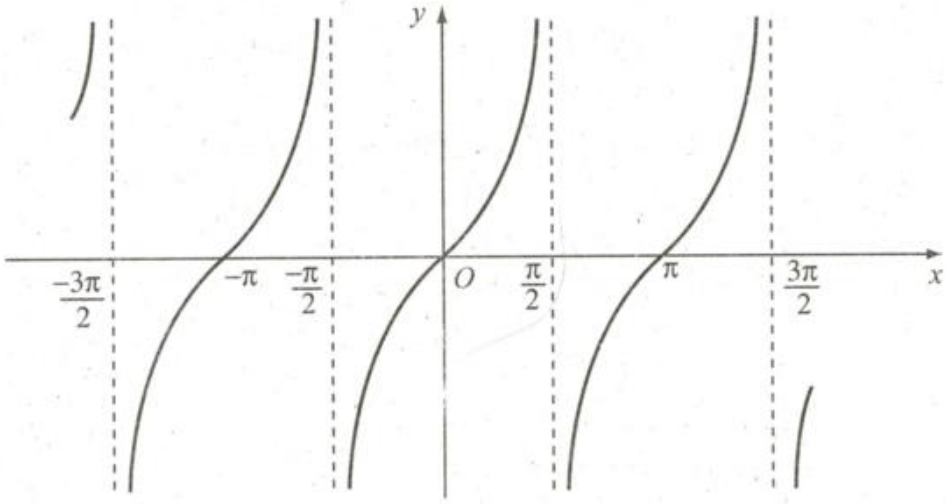
Vì $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số có tâm đối xứng là gốc toạ độ O. Lấy đối xứng qua tâm O đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, ta được đồ thị hàm số trên nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

Từ đó, ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta thấy trên khoảng này, hàm số $y = \tan x$ đồng biến (h.8).



Hình 8

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π nên tịnh tiến đồ thị hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ song song với trục hoành từng đoạn có độ dài π, ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên D (h.9).



Hình 9

• Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

4. Hàm số $y = \cot x$

Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- Là hàm số lẻ ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Sau đây, ta xét sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0 ; \pi)$, rồi từ đó suy ra đồ thị của hàm số trên D.

a) Sự biến thiên và đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0 ; \pi)$

Với hai số x_1 và x_2 sao cho $0 < x_1 < x_2 < \pi$, ta có $0 < x_2 - x_1 < \pi$. Do đó

$$\cot x_1 - \cot x_2 = \frac{\cos x_1}{\sin x_1} - \frac{\cos x_2}{\sin x_2}$$

$$= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\sin x_1 \sin x_2}$$

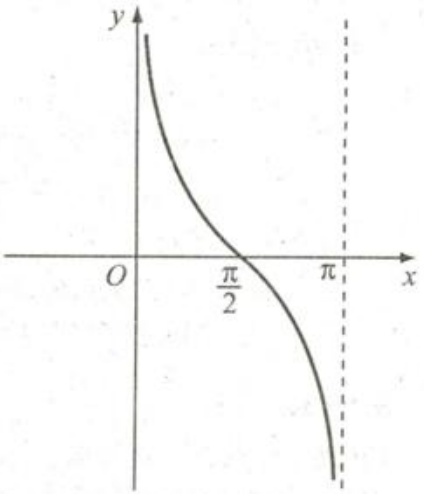
$$= \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\sin x_1 \sin x_2} > 0$$

hay $\cot x_1 > \cot x_2$.

Vậy hàm số $y = \cot x$ *nghịch biến* trên khoảng $(0 ; \pi)$.

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y = \cot x$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

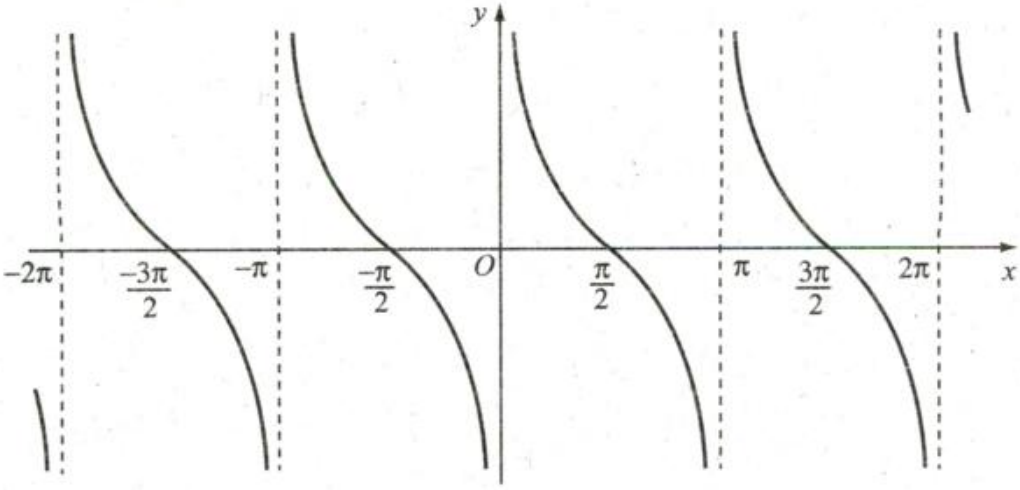


Hình 10

Hình 10 biểu diễn đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0 ; \pi)$.

b) Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên D

Đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên D được biểu diễn trên Hình 11.



Hình 11

• Tập giá trị của hàm số $y = \cot x$ là khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

BÀI ĐỌC THÊM

HÀM SỐ TUẦN HOÀN

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

1. Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số ***tuần hoàn***, nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có :

a) $x - T \in D$ và $x + T \in D$;

b) $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các tính chất trên được gọi là ***chu kì*** của hàm số tuần hoàn đó.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Hàm số hằng $f(x) = c$ (c là hằng số) là một hàm số tuần hoàn. Với mọi số dương T ta đều có $f(x + T) = f(x) = c$. Tuy nhiên không có số dương T nhỏ nhất thoả mãn định nghĩa nên hàm số tuần hoàn này không có chu kì.

Ví dụ 2. Hàm phần nguyên $y = [x]$ đã được nêu trong Đại số 10.

Ta xét hàm $y = \{x\}$ xác định bởi : $\{x\} = x - [x]$. Nó được gọi là hàm phần lẻ của x.

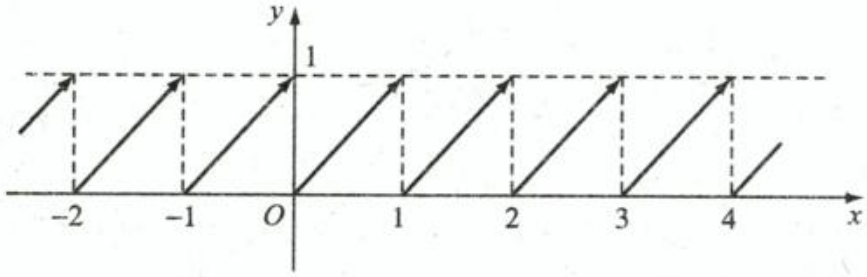
Chẳng hạn, $\{4,3\} = 4,3 - 4 = 0,3$;

$\{-4,3\} = -4,3 - (-5) = 0,7$.

Ta chứng tỏ hàm $y = \{x\}$ là hàm tuần hoàn với chu kì là 1.

Thật vậy, $\{x + 1\} = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x] = \{x\}$.

Đồ thị của hàm số $y = \{x\}$ được biểu diễn trên Hình 12. Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số có chu kì bằng 1.



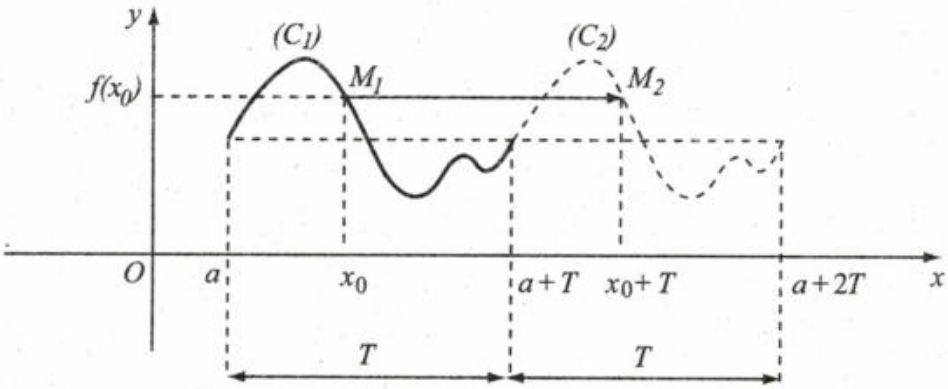
Hình 12

3. Đồ thị của hàm số tuần hoàn

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên D và tuần hoàn với chu kì T.

Xét hai đoạn $X_1 = [a ; a + T]$ và $X_2 = [a + T ; a + 2T]$ với $a \in D$.

Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là phần của đồ thị ứng với $x \in X_1$ và $x \in X_2$, ta tìm mối liên hệ giữa (C_1) và (C_2) (h.13).



Hình 13

Lấy x_0 bất kì thuộc X_1 thì $x_0 + T \in X_2$.

Xét hai điểm M_1 và M_2 lần lượt thuộc (C_1) và (C_2), trong đó

$$M_1(x_1\,;\,y_1) \text{ với } \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = f(x_0)\,; \end{cases}$$

$$M_2\,(x_2\,;\,y_2) \text{ với } \begin{cases} x_2 = x_0 + T \\ y_2 = f(x_0 + T) = f(x_0). \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1\,;\,y_2 - y_1) = (T\,;\,0) = \vec{v}$ ($\vec{v}$ không đổi).

Suy ra M_2 là ảnh của M_1 trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Vậy "(C_2) là ảnh của (C_1) trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$".

Từ đó, muốn vẽ đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kì T, ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a\,;\,a+T]$, sau đó thực hiện lần lượt các phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{v}$, $2\vec{v}$, ..., và các vectơ $-\vec{v}$, $-2\vec{v}$, ... ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

II – TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Tính tuần hoàn và chu kì của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

ĐỊNH LÍ 1

> Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Chứng minh. Ta chứng minh cho hàm số $y = \sin x$ (trường hợp hàm số $y = \cos x$ được chứng minh tương tự).

Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và với mọi số thực x ta có

$$x - 2\pi \in \mathbb{R},\ x + 2\pi \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x. \qquad (2)$$

Vậy $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn. Ta chứng minh 2π là số dương nhỏ nhất thoả mãn các tính chất (1) và (2).

Giả sử có số T sao cho $0 < T < 2\pi$ và $\sin(x + T) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn $x = \dfrac{\pi}{2}$, ta được

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos T = 1.$$

Điều này trái giả thiết $0 < T < 2\pi$.

Vậy 2π là số dương nhỏ nhất thoả mãn tính chất (2), nghĩa là 2π là chu kì của hàm số $y = \sin x$. ■

2. Tính tuần hoàn và chu kì của các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

ĐỊNH LÍ 2

> Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Chứng minh. Ta chứng minh cho hàm số $y = \tan x$, (trường hợp hàm số $y = \cot x$ được chứng minh tương tự).

Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \in D$ ta có $x - \pi \in D$ và $x + \pi \in D$, $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Vậy $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn. Ta chứng minh π là chu kì của hàm số này.

Giả sử có số T sao cho $0 < T < \pi$ và $\tan(x + T) = \tan x$, $\forall x \in D$.

Chọn $x = 0$ thì $x \in D$ và $\tan(0 + T) = \tan 0 = 0$.

Nhưng $\tan \alpha = 0$ khi và chỉ khi $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, do đó phải có $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < \pi$.

Vậy chu kì của hàm số $y = \tan x$ là π. ■

Bài tập

1. Hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$:

a) Nhận giá trị bằng 0 ; b) Nhận giá trị bằng 1 ;

c) Nhận giá trị dương ; d) Nhận giá trị âm.

2. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$; b) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$;

c) $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; d) $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$.

4. Chứng minh rằng $\sin 2(x + k\pi) = \sin 2x$ với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \sin 2x$.

5. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$, tìm các giá trị của x để $\cos x = \frac{1}{2}$.

6. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

7. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị âm.

8. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số :

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$;

b) $y = 3 - 2\sin x$.