§3 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

I – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Định nghĩa

Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$at + b = 0, \qquad (1)$$

trong đó a, b là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một trong các hàm số lượng giác.

Ví dụ 1

a) $2\sin x - 3 = 0$ là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$.

b) $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$ là phương trình bậc nhất đối với $\tan x$.

1

Giải các phương trình trong Ví dụ 1.

2. Cách giải

Chuyển vế rồi chia hai vế của phương trình (1) cho a, ta đưa phương trình (1) về phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

a) $3\cos x + 5 = 0$; b) $\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$.

Giải

a) Từ $3\cos x + 5 = 0$, chuyển vế ta có

$$3\cos x = -5. \qquad (2)$$

Chia hai vế của phương trình (2) cho 3, ta được $\cos x = -\dfrac{5}{3}$.

Vì $-\dfrac{5}{3} < -1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Từ $\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$, chuyển vế ta có

$$\sqrt{3}\cot x = 3. \qquad (3)$$

Chia hai vế của phương trình (3) cho $\sqrt{3}$, ta được $\cot x = \sqrt{3}$.

Vì $\sqrt{3} = \cot\dfrac{\pi}{6}$ nên $\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ■

3. Phương trình đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau :

a) $5\cos x - 2\sin 2x = 0$; (4)

b) $8\sin x\cos x\cos 2x = -1$. (5)

Giải

a) Ta có $5\cos x - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 5\cos x - 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(5 - 4\sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 5 - 4\sin x = 0.\end{array}\right.$$

• $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• $5 - 4\sin x = 0 \Leftrightarrow 4\sin x = 5 \Leftrightarrow \sin x = \frac{5}{4}$, vì $\frac{5}{4} > 1$ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình (4) có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có

$8\sin x\cos x\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 4\sin 2x\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2\sin 4x = -1$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \blacksquare$$

II – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$at^2 + bt + c = 0,$$

trong đó a, b, c là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một trong các hàm số lượng giác.

Ví dụ 4

a) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ là phương trình bậc hai đối với $\sin x$.

b) $3\cot^2 x - 5\cot x - 7 = 0$ là phương trình bậc hai đối với $\cot x$.

2

Giải các phương trình sau :

a) $3\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$;

b) $3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$.

2. Cách giải

Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng, ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$2\sin^2\frac{x}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}-2=0.$$

Giải. Đặt $\sin\frac{x}{2}=t$ với điều kiện

$$-1\le t\le 1 \qquad (*),$$

ta được phương trình bậc hai theo t

$$2t^2+\sqrt{2}t-2=0. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $t_1=-\sqrt{2}$ và $t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ nhưng chỉ có $t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ thoả mãn điều kiện (*). Vậy ta có

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k4\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k4\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$ ■

3. Phương trình đưa về dạng phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

3

Hãy nhắc lại :

a) Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản ;

b) Công thức cộng ;

c) Công thức nhân đôi ;

d) Công thức biến đổi tích thành tổng và tổng thành tích.

Có nhiều phương trình lượng giác mà khi giải có thể đưa về phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$6\cos^2x+5\sin x-2=0. \qquad (2)$$

Giải. Biến đổi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ta đưa phương trình (2) về dạng

$$-6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0.$$

Đặt $\sin x = t$ với điều kiện $-1 \le t \le 1$, ta được phương trình bậc hai theo t

$$-6t^2 + 5t + 4 = 0. \quad (3)$$

Phương trình (3) có hai nghiệm $t_1 = \frac{4}{3}$ và $t_2 = -\frac{1}{2}$ nhưng chỉ có $t_2 = -\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện. Vậy ta có

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \blacksquare$$

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\sqrt{3}\tan x - 6\cot x + 2\sqrt{3} - 3 = 0. \quad (4)$$

Giải. Điều kiện của phương trình (4) là $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

Vì $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ nên phương trình (4) có thể viết dưới dạng

$$\sqrt{3}\tan x - \frac{6}{\tan x} + 2\sqrt{3} - 3 = 0,$$

hay $$\sqrt{3}\tan^2 x + (2\sqrt{3} - 3)\tan x - 6 = 0.$$

Đặt $\tan x = t$, ta được phương trình bậc hai theo t

$$\sqrt{3}t^2 + (2\sqrt{3} - 3)t - 6 = 0. \quad (5)$$

Phương trình (5) có hai nghiệm : $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = -2$.

Với $t_1 = \sqrt{3}$ ta có $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $t_2 = -2$ ta có $\tan x = -2 \Leftrightarrow x = \arctan(-2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện nêu trên nên chúng là các nghiệm của phương trình (4). ■

4

Giải phương trình $3\cos^2 6x + 8\sin 3x \cos 3x - 4 = 0$.

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - \cos^2 x = -2. \qquad (6)$$

Giải. Trước hết, ta thấy nếu $\cos x = 0$ thì phương trình (6) có vế trái bằng 2, còn vế phải bằng -2, nên $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình (6). Vậy $\cos x \neq 0$.

Vì $\cos x \neq 0$ nên chia hai vế của phương trình (6) cho $\cos^2 x$, ta được

$$2\tan^2 x - 5\tan x - 1 = -\frac{2}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\tan^2 x - 5\tan x - 1 = -2(1 + \tan^2 x).$$

Ta đưa được phương trình (6) về phương trình bậc hai theo $\tan x$

$$4\tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

• $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

• $\tan x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \arctan\dfrac{1}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình (6) có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

và $$x = \arctan\frac{1}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$ ■

III – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI $\sin x$ VÀ $\cos x$

1. Công thức biến đổi biểu thức $a\sin x + b\cos x$

5

Dựa vào các công thức cộng đã học :

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$; $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$;

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$; $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

và kết quả $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, hãy chứng minh rằng :

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Trong trường hợp tổng quát, với $a^2 + b^2 \neq 0$, ta có

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên có một góc α sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha.$$

Khi đó $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha)$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha).$$

Vậy ta có công thức sau

$$\boxed{\begin{array}{l} a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\alpha), \qquad (1) \\ \text{với } \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ và } \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{array}}$$

2. Phương trình dạng $a\sin x + b\cos x = c$

Xét phương trình $\quad a\sin x + b\cos x = c, \quad (2)$

với $a, b, c \in \mathbb{R}$; a, b không đồng thời bằng 0 ($a^2 + b^2 \neq 0$).

Nếu $a = 0$, $b \neq 0$ hoặc $a \neq 0$, $b = 0$, phương trình (2) có thể đưa ngay về phương trình lượng giác cơ bản. Nếu $a \neq 0$, $b \neq 0$, ta áp dụng công thức (1).

Ví dụ 9. Giải phương trình

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$$

Giải. Theo công thức (1) ta có

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}\,\sin(x + \alpha) = 2\sin(x + \alpha),$$

trong đó $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Từ đó lấy $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ thì ta có

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Khi đó

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}). \end{array}\right. \blacksquare$$

6

Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}$.

Bài tập

1. Giải phương trình

$$\sin^2 x - \sin x = 0.$$

2. Giải các phương trình sau :

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$.

3. Giải các phương trình sau :

a) $\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\cos\dfrac{x}{2} + 2 = 0$;

b) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$;

c) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$;

d) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$.

4. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

b) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$;

d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$.

5. Giải các phương trình sau :

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$;

b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$;

c) $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$;

d) $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$.

6. Giải các phương trình sau :

a) $\tan(2x+1)\tan(3x-1) = 1$;

b) $\tan x + \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

BÀI ĐỌC THÊM

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Ta chỉ xét các bất phương trình lượng giác cơ bản. Đó là những bất phương trình dạng $\sin x > a$ (hoặc $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$), trong đó a là một số thực tuỳ ý. Ta cũng xét những bất phương trình tương tự đối với các hàm số $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

I – BẤT PHƯƠNG TRÌNH $\sin x > a$

Nếu $a \geq 1$ thì bất phương trình $\sin x > a$ vô nghiệm, vì $\sin x \leq 1$ với mọi x.

Nếu $a < -1$ thì mọi số thực x đều là nghiệm của bất phương trình $\sin x > a$, vì $\sin x \geq -1$ với mọi x.

Ta xét trường hợp $-1 \leq a < 1$ thông qua ví dụ sau.

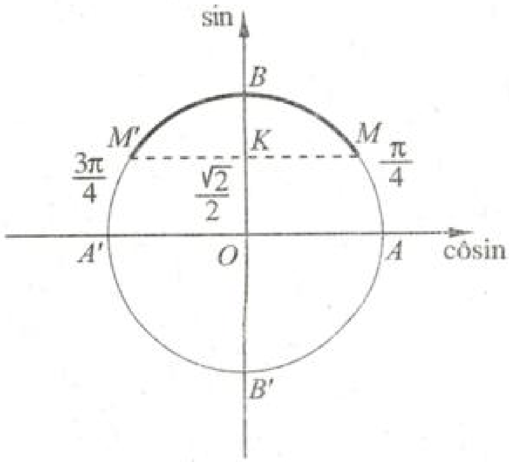
Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1)$$

Giải. Vẽ đường tròn lượng giác tâm O. Trên trục sin lấy điểm K sao cho

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (h.18).}$$

Kẻ từ K đường thẳng vuông góc với trục sin, cắt đường tròn tại hai điểm M và M'.



Hình 18

Rõ ràng, nếu cung $\overset{\frown}{AD}$ có số đo thoả mãn bất phương trình (1) thì D phải nằm trên cung $\overset{\frown}{MBM'}$ và ngược lại.

Ta có sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và

sđ $\overset{\frown}{AM'} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

$$\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Chú ý. Điểm cuối của cung có số đo là nghiệm của bất phương trình $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ phải nằm trên cung $\overset{\frown}{M'B'M}$ và ngược lại (h.18). Khi đó, nghiệm của bất phương trình là

$$\frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + k2\pi$$

hay $$\frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \frac{9\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

II – BẤT PHƯƠNG TRÌNH $\cos x \leq a$

Nếu $a < -1$ thì bất phương trình $\cos x \leq a$ vô nghiệm.

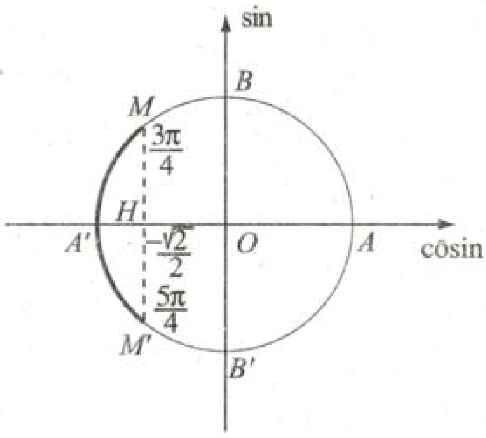
Nếu $a \geq 1$ thì mọi số thực x đều là nghiệm của bất phương trình $\cos x \leq a$.

Ta xét trường hợp $-1 \leq a < 1$ thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Giải. Trên trục côsin lấy điểm H có hoành độ là $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kẻ từ H đường thẳng vuông góc với trục côsin, cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M và M' (h.19).



Hình 19

Rõ ràng, nếu cung $\overset{\frown}{AE}$ có số đo thoả mãn bất phương trình (2) thì E phải nằm trên cung $\overset{\frown}{MA'M'}$ và ngược lại. Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Chú ý. Bất phương trình $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ có nghiệm là

$$\frac{5\pi}{4} + k2\pi < x < \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right) + k2\pi$$

hay
$$\frac{5\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{11\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

III – BẤT PHƯƠNG TRÌNH $\tan x \geq a$

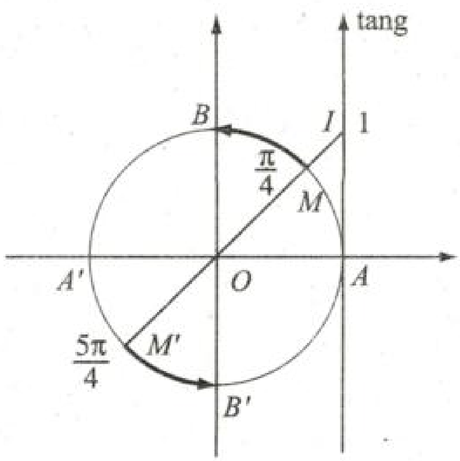
Với mọi số thực a, bất phương trình $\tan x \geq a$ luôn có nghiệm.

Ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\tan x \geq 1. \qquad (3)$$

Giải. Lấy trên trục tang điểm I sao cho $\overline{AI} = 1$. Nối OI cắt đường tròn lượng giác tại M và M' (h.20). Nếu cung $\overset{\frown}{AE}$ có số đo thoả mãn bất phương trình (3) thì điểm E phải nằm trên một trong hai cung $\overset{\frown}{MB}$ và $\overset{\frown}{M'B'}$ và ngược lại.



Hình 20

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}). \blacksquare$$

Chú ý. Nghiệm của bất phương trình $\tan x < 1$ là

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

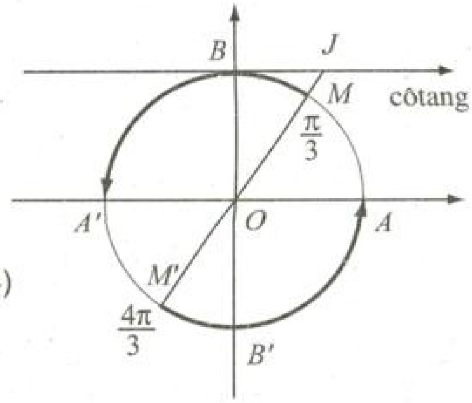
IV – BẤT PHƯƠNG TRÌNH $\cot x \leq a$

Với mọi số thực a, bất phương trình $\cot x \leq a$ đều có nghiệm.

Ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình

$$\cot x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad (4)$$



Hình 21

Giải. Lấy điểm J trên trục côtang sao cho $\overline{BJ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Nối JO cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M và M' (h.21).

Nếu cung $\overset{\frown}{AF}$ có số đo thoả mãn bất phương trình (4) thì điểm F phải nằm trên một trong hai cung $\overset{\frown}{MA'}$ và $\overset{\frown}{M'A}$ và ngược lại.

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Chú ý. Nghiệm của bất phương trình $\cot x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ là

$$k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$