§3 NHỊ THỨC NIU-TƠN

I – CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

Ta có :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 b^3.$$

1

Khai triển biểu thức $(a+b)^4$ thành tổng các đơn thức.

Tổng quát, ta thừa nhận công thức khai triển biểu thức $(a+b)^n$ thành tổng các đơn thức như sau :

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \quad (1)}$$

Công thức (1) được gọi là ***công thức nhị thức Niu-tơn.***

HỆ QUẢ

Với $a = b = 1$, ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$.

Với $a = 1$; $b = -1$, ta có

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^k C_n^k + ... + (-1)^n C_n^n.$$

CHÚ Ý

Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1) :

a) Số các hạng tử là $n + 1$.

b) Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

Ví dụ 1. Khai triển biểu thức $(x + y)^6$.

Giải. Theo công thức nhị thức Niu-tơn ta có

$$(x + y)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 y + C_6^2 x^4 y^2 + C_6^3 x^3 y^3 + C_6^4 x^2 y^4 + C_6^5 x y^5 + C_6^6 y^6$$
$$= x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6. \blacksquare$$

Ví dụ 2. Khai triển biểu thức $(2x - 3)^4$.

Giải. Theo công thức nhị thức Niu-tơn ta có

$$(2x - 3)^4 = C_4^0 (2x)^4 + C_4^1 (2x)^3 (-3) + C_4^2 (2x)^2 (-3)^2 + C_4^3 2x(-3)^3 + C_4^4 (-3)^4$$
$$= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81. \blacksquare$$

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng với $n \geq 4$, ta có

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}.$$

Giải. Kí hiệu $A = C_n^0 + C_n^2 + ...$

$B = C_n^1 + C_n^3 + ...$

Theo Hệ quả ta có $2^n = A + B$,

$0 = A - B$.

Từ đó suy ra $A = B = 2^{n-1}$. $\blacksquare$

II – TAM GIÁC PA-XCAN

Trong công thức nhị thức Niu-tơn ở mục I, cho $n = 0, 1, \ldots$ và xếp các hệ số thành dòng, ta nhận được tam giác sau đây, gọi là ***tam giác Pa-xcan***.

$n = 0$								1							
$n = 1$							1		1						
$n = 2$						1		2		1					
$n = 3$					1		3		3		1				
$n = 4$				1		4		6		4		1			
$n = 5$			1		5		10		10		5		1		
$n = 6$		1		6		15		20		15		6		1	
$n = 7$	1		7		21		35		35		21		7		1

NHẬN XÉT

Từ công thức $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ suy ra cách tính các số ở mỗi dòng dựa vào các số ở dòng trước nó. Chẳng hạn

$$C_5^2 = C_4^1 + C_4^2 = 4 + 6 = 10.$$

2

Dùng tam giác Pa-xcan, chứng tỏ rằng :

a) $1 + 2 + 3 + 4 = C_5^2$;

b) $1 + 2 + \ldots + 7 = C_8^2$.

Bài tập

1. Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-tơn :

a) $(a + 2b)^5$;   b) $(a - \sqrt{2})^6$;   c) $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{13}$.

2. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức : $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$.

3. Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 - 3x)^n$ là 90. Tìm n.

4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$.

5. Từ khai triển biểu thức $(3x - 4)^{17}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

6. Chứng minh rằng :

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100 ;

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10 000 ;

c) $\sqrt{10}\left[(1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100}\right]$ là một số nguyên.

BẠN CÓ BIẾT ?

PA-XCAN (PASCAL)

Blaise Pascal
(1623 – 1662)

Pa-xcan là nhà toán học, vật lí học và triết học người Pháp. Pa-xcan lúc nhỏ là một cậu bé thần đồng. Cha cậu nhận thấy điều này. Không muốn sớm làm mệt óc con, ông cấm cậu bé Pa-xcan học toán. Song điều này càng kích thích tính tò mò của cậu. Năm 12 tuổi, một hôm cậu hỏi cha "Hình học là gì ?". Cha cậu giải thích sơ qua cho cậu hiểu. Pa-xcan rất lấy làm thích thú. Cậu liền bước theo con đường đúng là thiên hướng của mình. Không cần sách vở, một mình cậu tự chứng minh được rằng tổng các góc trong một tam giác bằng hai góc vuông. Ở tuổi 16, Pa-xcan viết công trình đầu tiên của mình về các thiết diện cônic.

Pa-xcan viết hàng loạt công trình về các chuỗi số và các hệ số nhị thức. Pa-xcan đã đưa ra bảng các hệ số của sự khai triển của $(a + b)^n$ dưới dạng một tam giác, ngày nay gọi là "Tam giác Pa-xcan". Pa-xcan đã tìm ra các hệ số nhị thức bằng phương pháp quy nạp toán học, đó là một trong những phát minh quan trọng của ông. Điều mới mẻ ở đây là Pa-xcan phát hiện ra rằng các hệ số nhị thức chính là số các tổ hợp chập k của n phần tử và Pa-xcan đã dùng chúng để giải những bài toán của lí thuyết xác suất.

Một cống hiến lớn nữa của Pa-xcan là việc khởi thảo phép tính các đại lượng vô cùng bé.

Về mặt kĩ thuật, ngay từ năm 1642, lúc mới 19 tuổi, Pa-xcan đã sáng chế ra một máy tính để thực hiện các phép tính số học. Nguyên tắc của máy này đã là xuất phát điểm cho việc chế tạo máy tính điện tử về sau này.

Để ghi nhớ công lao của người đầu tiên đã sáng chế ra máy tính, các nhà tin học đã đặt tên cho một ngôn ngữ máy tính rất phổ biến là ngôn ngữ Pa-xcan.

Về vật lí, Pa-xcan đã nghiên cứu áp suất của khí quyển và các vấn đề thuỷ tĩnh học.

Tên của Pa-xcan đã được đặt cho một miệng núi lửa trên Mặt Trăng.