



I – PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử

Một trong những khái niệm cơ bản của lí thuyết xác suất là phép thử. Một thí nghiệm, một phép đo hay một sự quan sát hiện tượng nào đó, ... được hiểu là *phép thử*.

Chẳng hạn, gieo một đồng tiền kim loại (gọi tắt là đồng tiền), rút một quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ (cỗ bài 52 lá) hay bắn một viên đạn vào bia, ... là những ví dụ về phép thử.

Khi gieo một đồng tiền, ta không thể đoán trước được mặt ghi số (mặt ngửa, viết tắt là N) hay mặt kia (mặt sấp, viết tắt là S) sẽ xuất hiện (quay lên trên). Đó là ví dụ về *phép thử ngẫu nhiên*.

Một cách tổng quát :

|| *Phép thử ngẫu nhiên* là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

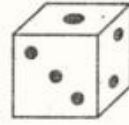
Để đơn giản, từ nay phép thử ngẫu nhiên được gọi tắt là phép thử. Trong Toán học phổ thông, ta chỉ xét các phép thử có một số hữu hạn kết quả.

2. Không gian mẫu



1

Hãy liệt kê các kết quả có thể của phép thử gieo một con súc sắc.



Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô-mê-ga).

Ví dụ 1. Gieo một đồng tiền (h.28). Đó là phép thử với không gian mẫu $\Omega = \{S, N\}$. Ở đây, S kí hiệu cho kết quả "Mặt sấp xuất hiện" và N kí hiệu cho kết quả "Mặt ngửa xuất hiện".

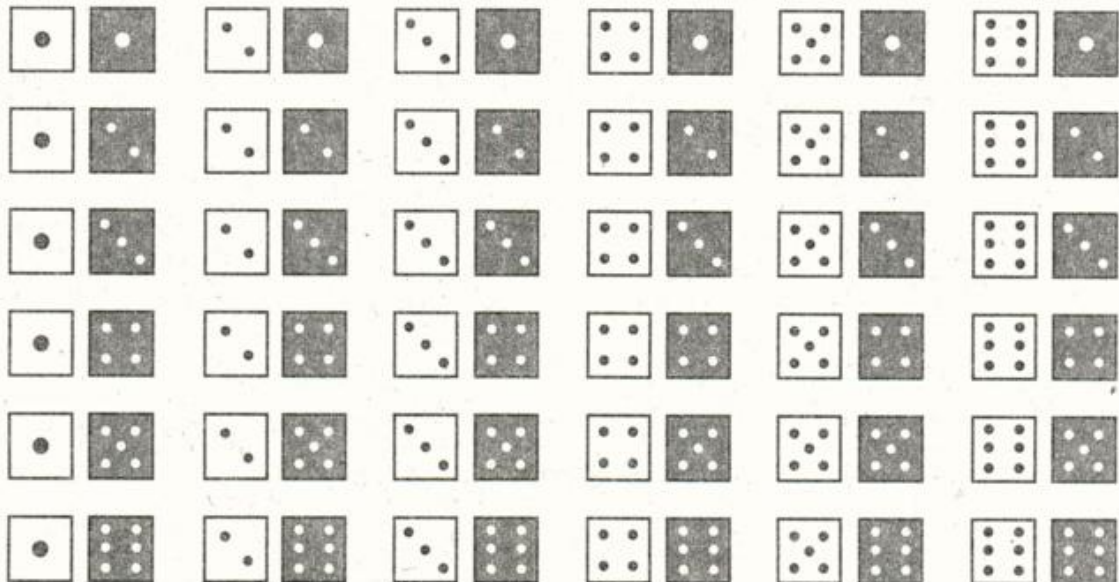


Hai mặt đồng tiền

Hình 28

Ví dụ 2. Nếu phép thử là gieo một đồng tiền hai lần thì không gian mẫu gồm bốn phần tử: $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$, trong đó, chẳng hạn, SN là kết quả "Lần đầu đồng tiền xuất hiện mặt sấp, lần thứ hai đồng tiền xuất hiện mặt ngửa", ...

Ví dụ 3. Nếu phép thử là gieo một con súc sắc hai lần, thì không gian mẫu gồm 36 phần tử: $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ở đó (i, j) là kết quả "Lần đầu xuất hiện mặt i chấm, lần sau xuất hiện mặt j chấm" (h. 29).



Hình 29

II – BIẾN CỐ

Ví dụ 4. Gieo một đồng tiền hai lần. Đây là phép thử với không gian mẫu

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}.$$

Ta thấy sự kiện A : "Kết quả của hai lần gieo là như nhau" có thể xảy ra khi phép thử được tiến hành. Nó xảy ra khi và chỉ khi một trong hai kết quả SS, NN xuất hiện. Như vậy, sự kiện A tương ứng với một và chỉ một tập con $\{SS, NN\}$ của không gian mẫu. Chính vì lẽ đó, ta đồng nhất chúng với nhau và viết $A = \{SS, NN\}$. Ta gọi A là một *biến cố*.

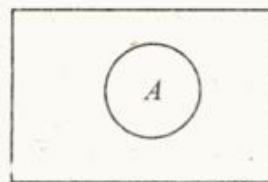
Tương tự, biến cố B : "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa" được viết là

$$B = \{SN, NS, NN\}.$$

Ngược lại, tập con $C = \{SS, SN\}$ là biến cố có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề : "Mặt sấp xuất hiện trong lần gieo đầu tiên".

Các biến cố A, B và C ở trên đều gắn liền với phép thử *gieo một đồng tiền hai lần* nên ta nói chúng liên quan đến phép thử đã cho.

– Một cách tổng quát, mỗi biến cố *liên quan* đến một phép thử được mô tả bởi một tập con của không gian mẫu (h.30). Từ đó ta có định nghĩa sau đây.



Hình 30

|| **Biến cố** là một tập con của không gian mẫu.

Như vậy, một biến cố liên quan đến phép thử là một tập hợp bao gồm các kết quả nào đó của phép thử.

– Cần chú ý rằng biến cố đôi khi được cho dưới dạng một mệnh đề xác định tập hợp như đã thấy trong Ví dụ 4, hoặc trong phép thử *gieo con súc sắc*, biến cố A : "Con súc sắc xuất hiện mặt chẵn chẵn" được cho dưới dạng mệnh đề xác định tập con $A = \{2, 4, 6\}$ của không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.

Người ta thường kí hiệu các biến cố bằng các chữ in hoa A, B, C, \dots

– Từ nay về sau, khi nói *cho các biến cố* A, B, \dots mà không nói gì thêm thì ta hiểu chúng cùng liên quan đến một phép thử.

|| Tập \emptyset được gọi là **biến cố không thể** (gọi tắt là **biến cố không**). Còn tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.

Chẳng hạn, khi gieo một con súc sắc, biến cố : "Con súc sắc xuất hiện mặt 7 chấm" là biến cố không, còn biến cố : "Con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm không vượt quá 6" là biến cố chắc chắn.

– Ta nói rằng *biến cố* A xảy ra trong một phép thử nào đó khi và chỉ khi kết quả của phép thử đó là một phần tử của A (hay thuận lợi cho A).

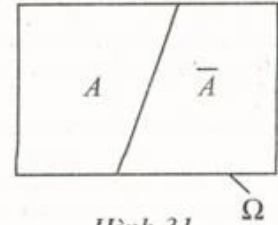
Như vậy, biến cố không thể (tức là \emptyset) không bao giờ xảy ra, trong khi đó, biến cố chắc chắn Ω luôn luôn xảy ra.

Trong Ví dụ 4, nếu xuất hiện kết quả SS thì A xảy ra còn B không xảy ra. Trong khi đó, nếu xuất hiện kết quả SN thì B xảy ra còn A không xảy ra.

III – PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

– Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử.

|| Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là **biến cố đối** của biến cố A , kí hiệu là \bar{A} (h.31).



Hình 31

Do $\omega \in \bar{A} \Leftrightarrow \omega \notin A$, nên \bar{A} xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

Chẳng hạn, nếu phép thử là *gieo một con súc sắc* thì biến cố B : "Xuất hiện mặt chẵn chấm" là biến cố đối của biến cố A : "Xuất hiện mặt lẻ chấm", nghĩa là $B = \bar{A}$.

– Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có định nghĩa sau :

|| Tập $A \cup B$ được gọi là **hợp** của các biến cố A và B .

|| Tập $A \cap B$ được gọi là **giao** của các biến cố A và B .

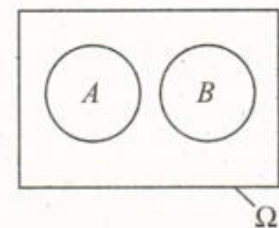
|| Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B **xung khắc**.

Theo định nghĩa, $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra ; $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B đồng thời xảy ra. Biến cố $A \cap B$ còn được viết là $A.B$.

A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không khi nào cùng xảy ra (h. 32).

Ta có bảng sau :

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \subset \Omega$	A là biến cố
$A = \emptyset$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố : "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố : "A và B"
$A \cap B = \emptyset$	A và B xung khắc
$B = \bar{A}$	A và B đối nhau.



Hình 32

Ví dụ 5. Xét phép thử gieo một đồng tiền hai lần với các biến cố :

A : "Kết quả của hai lần gieo là như nhau" ;

B : "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp" ;

C : "Lần thứ hai mới xuất hiện mặt sấp" ;

D : "Lần đầu xuất hiện mặt sấp".

Ta có :

$$A = \{SS, NN\} ; B = \{SN, NS, SS\} ; C = \{NS\} ; D = \{SS, SN\}.$$

Từ đó,

$$C \cup D = \{SS, SN, NS\} = B ;$$

$A \cap D = \{SS\}$ là biến cố "Cả hai lần đều xuất hiện mặt sấp".

Bài tập

1. Gieo một đồng tiền ba lần.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố :

A : "Lần đầu xuất hiện mặt sấp" ;

B : "Mặt sấp xảy ra đúng một lần" ;

C : "Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần".

2. Gieo một con súc sắc hai lần.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Phát biểu các biến cố sau dưới dạng mệnh đề :

$$A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} ;$$

$$B = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} ;$$

$$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

3. Một hộp chứa bốn cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau :

A : "Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn" ;

B : "Tích các số trên hai thẻ là số chẵn".

4. Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Kí hiệu A_k là biến cố : "Người thứ k bắn trúng", $k = 1, 2$.

a) Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2 :

A : "Không ai bắn trúng" ;

B : "Cả hai đều bắn trúng" ;

C : "Có đúng một người bắn trúng" ;

D : "Có ít nhất một người bắn trúng".

b) Chứng tỏ rằng $A = \overline{D}$; B và C xung khắc.

5. Từ một hộp chứa 10 cái thẻ, trong đó các thẻ đánh số 1, 2, 3, 4, 5 màu đỏ, thẻ đánh số 6 màu xanh và các thẻ đánh số 7, 8, 9, 10 màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Kí hiệu A, B, C là các biến cố sau :

A : "Lấy được thẻ màu đỏ" ;

B : "Lấy được thẻ màu trắng" ;

C : "Lấy được thẻ ghi số chẵn".

Hãy biểu diễn các biến cố A, B, C bởi các tập hợp con tương ứng của không gian mẫu.

6. Gieo một đồng tiền liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp hoặc cả bốn lần ngửa thì dừng lại.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố :

A : "Số lần gieo không vượt quá ba" ;

B : "Số lần gieo là bốn".

7. Từ một hộp chứa năm quả cầu được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi lần một quả và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau :

A : "Chữ số sau lớn hơn chữ số trước" ;

B : "Chữ số trước gấp đôi chữ số sau" ;

C : "Hai chữ số bằng nhau".