



PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I – PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC



Xét hai mệnh đề chứa biến $P(n)$: " $3^n < n + 100$ " và $Q(n)$: " $2^n > n$ " với $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ thì $P(n), Q(n)$ đúng hay sai ?
- b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $P(n), Q(n)$ đúng hay sai ?

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau :

Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Đó là *phương pháp quy nạp toán học*, hay còn gọi tắt là *phương pháp quy nạp*.

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau : Mệnh đề đã đúng khi $n = 1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n = 1 + 1 = 2$. Vì nó đúng với $n = 2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n = 2 + 1 = 3, \dots$. Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

II – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2. \quad (1)$$

Giải

Bước 1. Khi $n = 1$, vẽ trái chỉ có một số hạng bằng 1, vẽ phải bằng 1^2 .

Vậy hệ thức (1) đúng.

Bước 2. Đặt vé trái bằng S_n .

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \text{ (giả thiết quy nạp).}$$

Ta phải chứng minh rằng (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$S_{k+1} = S_k + [2(k + 1) - 1] = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. ■



Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Giải. Đặt $A_n = n^3 - n$.

Bước 1. Với $n = 1$, ta có $A_1 = 0 \vdots 3$.

Bước 2. Giả sử với $n = k \geq 1$ ta có

$$A_k = (k^3 - k) \vdots 3 \text{ (giả thiết quy nạp).}$$

Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 3$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \\ &= A_k + 3(k^2 + k). \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp $A_k \vdots 3$, hơn nữa, $3(k^2 + k) \vdots 3$ nên $A_{k+1} \vdots 3$.

Vậy $A_n = n^3 - n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. ■

CHÚ Ý

Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì :

- Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$;
- Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.



Cho hai số 3^n và $8n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

- So sánh 3^n với $8n$ khi $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Dự đoán kết quả tổng quát và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Bài tập

1. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có các đẳng thức :

$$a) 2 + 5 + 8 + \dots + 3n - 1 = \frac{n(3n + 1)}{2} ;$$

$$b) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} ;$$

$$c) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} .$$

2. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có :

$$a) n^3 + 3n^2 + 5n \quad \text{chia hết cho } 3 ;$$

$$b) 4^n + 15n - 1 \quad \text{chia hết cho } 9 ;$$

$$c) n^3 + 11n \quad \text{chia hết cho } 6.$$

3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có các bất đẳng thức :

$$a) 3^n > 3n + 1 ; \quad b) 2^{n+1} > 2n + 3.$$

4. Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Tính S_1, S_2, S_3 .
- b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.
5. Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

BẠN CÓ BIẾT ?



SUY LUẬN QUY NẠP

Người ta thường phân biệt hai hình thức suy luận, đó là suy diễn và quy nạp.

Suy diễn hay còn gọi là **phép suy diễn** là đi từ cái chung đến cái riêng, từ tổng quát đến cụ thể.

Chẳng hạn, từ định lí "Mọi số tự nhiên có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 đều chia hết cho 5", ta suy ra 135 và 170 chia hết cho 5. Trong suy diễn, nếu mệnh đề tổng quát là đúng thì kết luận có được bao giờ cũng đúng.

Còn **quy nạp** hay còn gọi là **phép quy nạp** lại đi từ cái riêng đến cái chung, từ cụ thể đến tổng quát.

Ví dụ : So sánh các số $A(n) = 10^{n-1}$ với $B(n) = 2004 + n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$. Bằng phép thử với $n = 1, 2, 3, 4$ ta có : $A(1) < B(1)$; $A(2) < B(2)$; $A(3) < B(3)$; $A(4) < B(4)$. Từ đây, ta kết luận

$$"10^{n-1} < 2004 + n \text{ với mọi } n \leq 4" \quad (1)$$

Rõ ràng kết luận này đúng.

Tuy nhiên, cũng từ kết quả của phép thử trên, nếu vội kết luận :

$$"10^{n-1} < 2004 + n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*" \quad (2)$$

thì lại sai lầm vì với $n = 5$ ta có :

$$10^4 > 2004 + 5 \text{ (tương tự, với } n = 6, 7, 8, \dots\text{).}$$

Đến đây, nếu kết luận tiếp :

$$"10^{n-1} > 2004 + n \text{ với mọi } n \geq 5", \quad (3)$$

sau đó với phép thử, cho dù có nhận được kết quả đúng với n bằng bao nhiêu chăng nữa thì vẫn không thể coi là đã chứng minh được mệnh đề (3).

Mệnh đề (3) sẽ được chứng minh nếu dùng *phương pháp quy nạp toán học*.

Các mệnh đề (2), (3) có được là kết quả của phép *quy nạp không hoàn toàn*, trong đó mệnh đề (2) là sai còn mệnh đề (3) là đúng.

Do phép thử chỉ có tính dự đoán, nên kết quả của phép *quy nạp không hoàn toàn* chỉ là giả thuyết, và việc phải làm tiếp theo là chứng minh hay bác bỏ.

Dưới đây, ta xét thêm vài ví dụ lịch sử.

Phéc-ma (P. Fermat) nhà toán học Pháp (1601 – 1665) khi xét các số dạng $2^{2^n} + 1$ thấy rằng với $n = 0, 1, 2, 3, 4$ thì $2^{2^0} + 1 = 3$; $2^{2^1} + 1 = 5$; $2^{2^2} + 1 = 17$; $2^{2^3} + 1 = 257$; $2^{2^4} + 1 = 65\ 537$ đều là những số nguyên tố. Từ đó, ông dự đoán rằng "Mọi số có dạng $2^{2^n} + 1$ với $n \in \mathbb{N}$ đều là những số nguyên tố".

Tuy nhiên, 100 năm sau, nhà toán học Thụy Sĩ O-le (Euler, 1707 – 1783) lại phát hiện ra rằng $2^{2^5} + 1$ không phải là số nguyên tố vì :

$$2^{2^5} + 1 = 4\ 294\ 967\ 297 : 641.$$

Cũng chính Phéc-ma là tác giả của giả thuyết nổi tiếng mà người đời sau gọi là định lí cuối cùng của Phéc-ma : "Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên dương với mọi số tự nhiên $n > 2$ ". Năm 1993, tức là hơn 350 năm sau, giả thuyết này mới được chứng minh hoàn toàn.

Nhà toán học Đức Lai-bơ-nit (Leibniz 1646 – 1716) đã chứng minh được rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n : 3$; $n^5 - n : 5$, $n^7 - n : 7$, từ đó ông dự đoán với mọi n nguyên dương và với mọi số lẻ p thì $n^p - n : p$. Tuy nhiên, chỉ ít lâu sau chính ông lại phát hiện ra $2^9 - 2 = 510$ không chia hết cho 9.

Lịch sử toán học đã để lại nhiều sự kiện thú vị xung quanh các giả thuyết có được bằng suy luận quy nạp không hoàn toàn (hoặc bằng phép tương tự). Có những giả thuyết đã bị bác bỏ, có nhiều giả thuyết đã được chứng minh, có những giả thuyết mà vài trăm năm sau vẫn không được chứng minh hay bác bỏ. Tuy nhiên, việc tìm cách chứng minh hay bác bỏ nhiều giả thuyết đã có tác dụng thúc đẩy sự phát triển của toán học.



Fermat
(1601 – 1665)