§2 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1 Tìm một giá trị của x sao cho $2\sin x - 1 = 0$.

Trong thực tế, ta gặp những bài toán dẫn đến việc tìm tất cả các giá trị của x nghiệm đúng những phương trình nào đó, như

$$3\sin 2x + 2 = 0$$

hoặc $$2\cos x + \tan 2x - 1 = 0,$$

mà ta gọi là các ***phương trình lượng giác***.

Giải phương trình lượng giác là tìm tất cả các giá trị của ẩn số thoả mãn phương trình đã cho. Các giá trị này là số đo của các cung (góc) tính bằng radian hoặc bằng độ.

Việc giải các phương trình lượng giác thường đưa về việc giải các phương trình sau, gọi là các ***phương trình lượng giác cơ bản*** :

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \tan x = a,\ \cot x = a,$$

trong đó a là một hằng số.

1. Phương trình $\sin x = a$

2

Có giá trị nào của x thoả mãn phương trình $\sin x = -2$ không ?

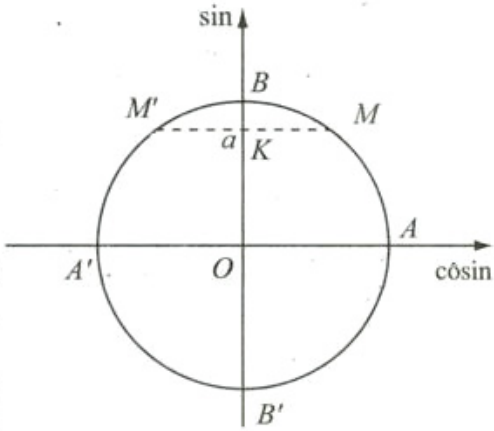
Xét phương trình $\sin x = a$. (1)

Trường hợp $|a| > 1$

Phương trình (1) vô nghiệm, vì $|\sin x| \leq 1$ với mọi x.

Trường hợp $|a| \leq 1$

Vẽ đường tròn lượng giác tâm O, trục hoành là trục côsin, trục tung là trục sin. Trên trục sin lấy điểm K sao cho $\overline{OK} = a$. Từ K kẻ đường vuông góc với trục sin, cắt đường tròn lượng giác tại M và M' đối xứng với nhau qua trục sin (nếu $|a| = 1$ thì M trùng với M') (h.14).



Hình 14

Từ đó ta thấy số đo của các cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ và $\overset{\curvearrowright}{AM'}$ là tất cả các nghiệm của phương trình (1).

Gọi α là số đo bằng radian của một cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$, ta có

$$\text{sđ}\,\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ ;$$

$$\text{sđ}\,\overset{\curvearrowright}{AM'} = \pi - \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình $\sin x = a$ có các nghiệm là

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z}; \\ x = \pi - \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{array}}$$

Nếu số thực α thoả mãn điều kiện $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = a \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin a$ (đọc là ac-sin-a, nghĩa là cung có sin bằng a). Khi đó, các nghiệm của phương trình $\sin x = a$ được viết là

$$x = \arcsin a + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \arcsin a + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

CHÚ Ý

a) Phương trình $\sin x = \sin \alpha$, với α là một số cho trước, có các nghiệm là

$$x = \alpha + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

và $$x = \pi - \alpha + k2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát,

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

b) Phương trình $\sin x = \sin \beta^{\circ}$ có các nghiệm là

$$x = \beta^{\circ} + k360^{\circ}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

và $$x = 180^{\circ} - \beta^{\circ} + k360^{\circ}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Trong một công thức về nghiệm của phương trình lượng giác không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

d) Các trường hợp đặc biệt :

- $a = 1$: Phương trình $\sin x = 1$ có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $a = -1$: Phương trình $\sin x = -1$ có các nghiệm là

$$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $a = 0$: Phương trình $\sin x = 0$ có các nghiệm là

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$; b) $\sin x = \dfrac{1}{5}$.

Giải

a) Vì $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ nên $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{và} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có $\sin x = \frac{1}{5}$ khi $x = \arcsin\frac{1}{5}$. Vậy phương trình $\sin x = \frac{1}{5}$ có các nghiệm là

$$x = \arcsin\frac{1}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{và} \quad x = \pi - \arcsin\frac{1}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3

Giải các phương trình sau :

a) $\sin x = \frac{1}{3}$;

b) $\sin(x + 45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

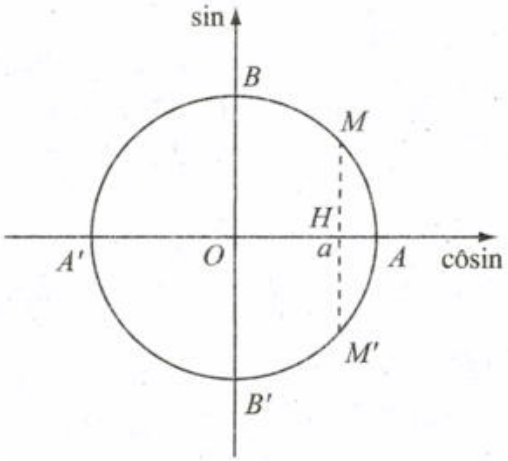
2. Phương trình $\cos x = a$

Trường hợp $|a| > 1$

Phương trình $\cos x = a$ vô nghiệm vì $|\cos x| \le 1$ với mọi x.

Trường hợp $|a| \le 1$

Tương tự trường hợp phương trình $\sin x = a$, ta lấy điểm H trên trục côsin sao cho $\overline{OH} = a$. Từ H kẻ đường vuông góc với trục côsin, cắt đường tròn lượng giác tại M và M' đối xứng với nhau qua trục côsin (nếu $|a| = 1$ thì $M \equiv M'$) (h.15).



Hình 15

Từ đó ta thấy số đo của các cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ và $\overset{\frown}{AM'}$ là tất cả các nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

Gọi α là số đo bằng radian của một cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$, ta có :

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ ;$$

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AM'} = -\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình $\cos x = a$ có các nghiệm là

$$\boxed{x = \pm\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

CHÚ Ý

a) Phương trình $\cos x = \cos \alpha$, với α là một số cho trước, có các nghiệm là

$$x = \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát, $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình $\cos x = \cos \beta^{\circ}$ có các nghiệm là

$$x = \pm \beta^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Nếu số thực α thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} 0 \le \alpha \le \pi \\ \cos\alpha = a \end{cases}$$

thì ta viết $\alpha = \arccos a$ (đọc là ac-côsin-a, có nghĩa là cung có côsin bằng a). Khi đó, các nghiệm của phương trình $\cos x = a$ còn được viết là

$$x = \pm \arccos a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

d) Các trường hợp đặc biệt :

- $a = 1$: Phương trình $\cos x = 1$ có các nghiệm là

$$x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $a = -1$: Phương trình $\cos x = -1$ có các nghiệm là

$$x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $a = 0$: Phương trình $\cos x = 0$ có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

a) $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$; b) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\cos x = \frac{1}{3}$; d) $\cos(x + 60^{\circ}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

a) $\cos x = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Vì $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$ nên

$$\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 3x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

c) $\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\frac{1}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

d) Vì $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$ nên

$$\cos(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x + 60^\circ) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow x + 60^\circ = \pm 45^\circ + k360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -15^\circ + k360^\circ \\ x = -105^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \blacksquare$$

4

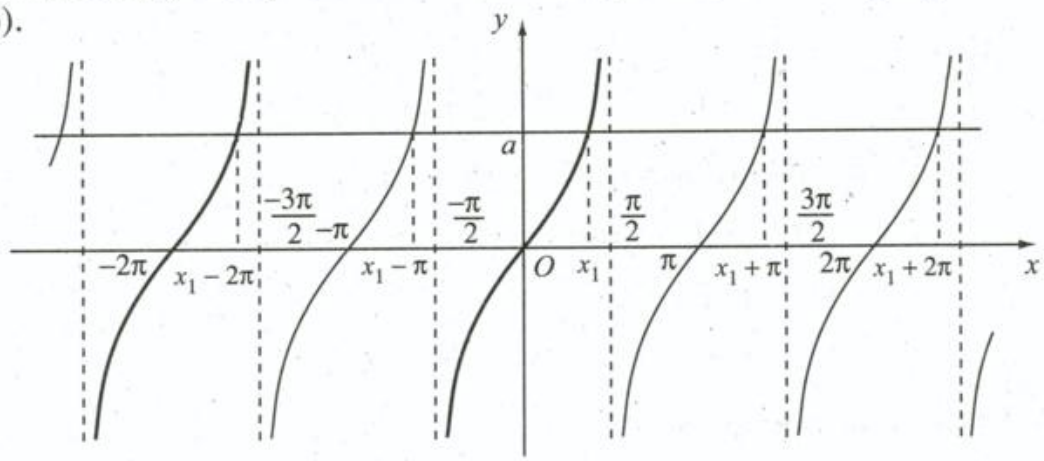
Giải các phương trình sau :

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$; b) $\cos x = \frac{2}{3}$; c) $\cos(x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Phương trình $\tan x = a$

Điều kiện của phương trình là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = \tan x$, ta thấy với mỗi số a, đồ thị hàm số $y = \tan x$ cắt đường thẳng $y = a$ tại các điểm có hoành độ sai khác nhau một bội của π (h.16).



Hình 16

Hoành độ của mỗi giao điểm là một nghiệm của phương trình $\tan x = a$.

Gọi x_1 là hoành độ giao điểm ($\tan x_1 = a$) thoả mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$.

Kí hiệu $x_1 = \arctan a$ (đọc là ac-tang-a, nghĩa là cung có tang bằng a). Khi đó, nghiệm của phương trình $\tan x = a$ là

$$\boxed{x = \arctan a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

CHÚ Ý

a) Phương trình $\tan x = \tan \alpha$, với α là một số cho trước, có các nghiệm là

$$x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát, $\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình $\tan x = \tan \beta^{\circ}$ có các nghiệm là

$$x = \beta^{\circ} + k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau :

a) $\tan x = \tan\frac{\pi}{5}$; b) $\tan 2x = -\frac{1}{3}$; c) $\tan(3x + 15^{\circ}) = \sqrt{3}$.

Giải

a) $\tan x = \tan\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\tan 2x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{1}{3}\right) + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Vì $\sqrt{3} = \tan 60^{\circ}$ nên $\tan(3x + 15^{\circ}) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(3x + 15^{\circ}) = \tan 60^{\circ}$

$\Leftrightarrow 3x + 15^{\circ} = 60^{\circ} + k180^{\circ} \Leftrightarrow 3x = 45^{\circ} + k180^{\circ}$

$\Leftrightarrow x = 15^{\circ} + k60^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}$. ■

5

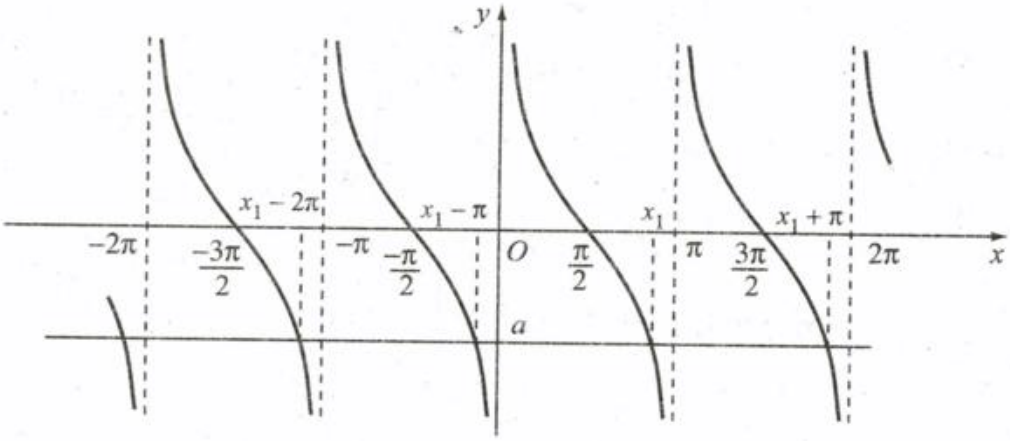
Giải các phương trình sau :

a) $\tan x = 1$; b) $\tan x = -1$; c) $\tan x = 0$.

4. Phương trình $\cot x = a$

Điều kiện của phương trình là $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = \cot x$, ta thấy với mỗi số a, đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = \cot x$ tại các điểm có hoành độ sai khác nhau một bội của π (h.17).



Hình 17

Hoành độ của mỗi giao điểm là một nghiệm của phương trình $\cot x = a$.

Gọi x_1 là hoành độ giao điểm ($\cot x_1 = a$) thoả mãn điều kiện $0 < x_1 < \pi$.

Kí hiệu $x_1 = \operatorname{arccot} a$ (đọc là ac-côtang-a, nghĩa là cung có côtang bằng a).

Khi đó, các nghiệm của phương trình $\cot x = a$ là

$$\boxed{x = \operatorname{arccot} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

CHÚ Ý

a) Phương trình $\cot x = \cot \alpha$, với α là một số cho trước, có các nghiệm là

$$x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát, $\cot f(x) = \cot g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình $\cot x = \cot \beta^{\circ}$ có các nghiệm là

$$x = \beta^{\circ} + k180^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau :

a) $\cot 4x = \cot \dfrac{2\pi}{7}$;

b) $\cot 3x = -2$;

c) $\cot (2x - 10^{\circ}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\cot 4x = \cot \dfrac{2\pi}{7} \Leftrightarrow 4x = \dfrac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cot 3x = -2 \Leftrightarrow 3x = \operatorname{arccot}(-2) + k\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\operatorname{arccot}(-2) + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Vì $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^{\circ}$ nên

$$\cot(2x - 10^{\circ}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot(2x - 10^{\circ}) = \cot 60^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10^{\circ} = 60^{\circ} + k180^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow x = 35^{\circ} + k90^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}.$$ ■

6

Giải các phương trình sau :

a) $\cot x = 1$; b) $\cot x = -1$; c) $\cot x = 0$.

GHI NHỚ

Mỗi phương trình

$\sin x = a$ ($|a| \le 1$) ; $\cos x = a$ ($|a| \le 1$) ; $\tan x = a$; $\cot x = a$

có *vô số nghiệm*.

Giải các phương trình trên là *tìm tất cả các nghiệm* của chúng.

BÀI ĐỌC THÊM

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI

Có thể sử dụng máy tính bỏ túi (MTBT) để giải các phương trình lượng giác cơ bản. Tuy nhiên, đối với phương trình $\sin x = a$ máy chỉ cho kết quả là $\arcsin a$ với đơn vị là radian hoặc đã được đổi ra độ. Lúc đó, theo công thức nghiệm ta viết các nghiệm là

$$x = \arcsin a + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

và

$$x = \pi - \arcsin a + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tương tự, đối với phương trình $\cos x = a$ máy chỉ cho kết quả là $\arccos a$, đối với phương trình $\tan x = a$ máy chỉ cho kết quả là $\arctan a$.

Ví dụ. Dùng MTBT CASIO *fx – 500 MS*, giải các phương trình sau :

a) $\sin x = 0,5$; b) $\cos x = -\frac{1}{3}$; c) $\tan x = \sqrt{3}$.

Giải

a) Nếu muốn có đáp số bằng độ thì bấm ba lần phím MODE rồi bấm phím 1 để màn hình hiện ra chữ D. Sau đó bấm liên tiếp

SHIFT sin 0 . 5 = o '''

Dòng thứ nhất trên màn hình hiện ra $\sin^{-1} 0.5$ (có nghĩa là $\arcsin 0,5$) và kết quả ở dòng thứ hai là 30^o0^o0 ($\arcsin 0,5$ đã được đổi ra độ).

Vậy phương trình $\sin x = 0,5$ có các nghiệm là

$$x = 30^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z}$$

và

$$x = 180^o - 30^o + k360^o = 150^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Bấm liên tiếp

SHIFT cos (–) 1 a b/c 3 = o '''

Dòng thứ nhất trên màn hình là $\cos^{-1} - (1 \lrcorner 3)$ (có nghĩa là $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$) và kết quả ở dòng thứ hai là $109^o28'16.3''$ ($\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ đã được đổi ra độ).

Vậy phương trình $\cos x = -\frac{1}{3}$ có các nghiệm là $x \approx \pm 109^o28'16'' + k360^o$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Bấm liên tiếp SHIFT tan √ 3 = o'''

dòng thứ nhất trên màn hình là $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (có nghĩa là $\arctan\sqrt{3}$) và kết quả ở dòng thứ hai là 60^o0^o0 ($\arctan\sqrt{3}$ đã được đổi ra độ).

Vậy phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ có các nghiệm là $x = 60^o + k180^o$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

CHÚ Ý

a) Để giải phương trình $\sin x = 0,5$ với kết quả là radian, ta bấm ba lần phím MODE rồi bấm phím 2, màn hình hiện ra chữ *R*.

Sau đó, bấm liên tiếp SHIFT sin 0 . 5 =

ta được kết quả gần đúng là 0,5236 ($\arcsin 0,5 \approx 0,5236$).

Vậy phương trình $\sin x = 0,5$ có các nghiệm là

$$x \approx 0,5236 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

và

$$x \approx \pi - 0,5236 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Để giải phương trình $\cot x = a$ bằng MTBT, ta đưa về giải phương trình $\tan x = \frac{1}{a}$.

Bài tập

1. Giải các phương trình sau :

a) $\sin(x + 2) = \frac{1}{3}$;

b) $\sin 3x = 1$;

c) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

d) $\sin(2x + 20^o) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau ?

3. Giải các phương trình sau :

a) $\cos(x - 1) = \frac{2}{3}$;

b) $\cos 3x = \cos 12^o$;

c) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$.

4. Giải phương trình $\dfrac{2\cos 2x}{1-\sin 2x} = 0$.

5. Giải các phương trình sau :

a) $\tan(x - 15^{\circ}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$;

c) $\cos 2x \tan x = 0$;

d) $\sin 3x \cot x = 0$.

6. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ và $y = \tan 2x$ bằng nhau ?

7. Giải các phương trình sau :

a) $\sin 3x - \cos 5x = 0$;

b) $\tan 3x \tan x = 1$.