§1 QUY TẮC ĐẾM

Trong Đại số tổ hợp, có nhiều tập hợp hữu hạn mà ta không dễ dàng xác định được số phần tử của chúng. Để đếm số phần tử của các tập hợp hữu hạn đó, cũng như để xây dựng các công thức trong Đại số tổ hợp, người ta thường sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Số phần tử của tập hợp hữu hạn A được kí hiệu là $n(A)$. Người ta cũng dùng kí hiệu $|A|$ để chỉ số phần tử của tập A. Chẳng hạn :

a) Nếu $A = \{a, b, c\}$ thì số phần tử của tập hợp A là 3, ta viết $n(A) = 3$ hay $|A| = 3$.

b) Nếu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8\}$ (tập hợp các số chẵn của A),

thì $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

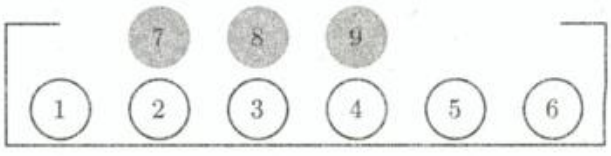
– Số phần tử của tập hợp A là $n(A) = 9$.

– Số phần tử của tập hợp B là $n(B) = 4$.

– Số phần tử của tập hợp $A \setminus B$ là $n(A \setminus B) = 5$.

I – QUY TẮC CỘNG

Ví dụ 1. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9 (h.22). Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy ?



Hình 22

Giải. Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn. Nếu chọn quả trắng thì có 6 cách chọn, còn nếu chọn quả đen thì có 3 cách.

Do đó, số cách chọn một trong các quả cầu là $6 + 3 = 9$ (cách). ■

QUY TẮC

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

1 Trong Ví dụ 1, kí hiệu A là tập hợp các quả cầu trắng, B là tập hợp các quả cầu đen. Nêu mối quan hệ giữa số cách chọn một quả cầu và số các phần tử của hai tập A, B.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau :

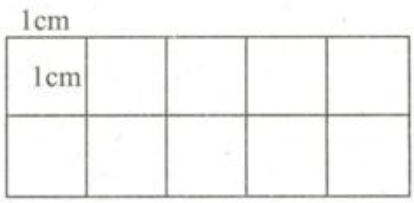
Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau, thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

CHÚ Ý

Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu hình vuông trong Hình 23 ?



Hình 23

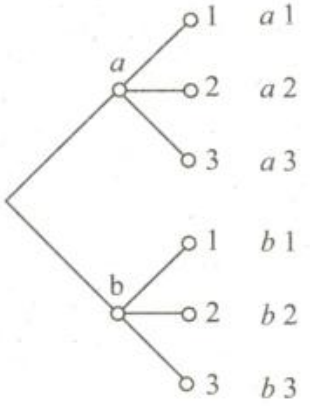
Giải. Rõ ràng, chỉ có thể có các hình vuông cạnh 1 cm và 2 cm. Kí hiệu A là tập hợp các hình vuông có cạnh 1 cm và B là tập hợp các hình vuông có cạnh 2 cm.

Vì $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B$ là tập hợp các hình vuông trong Hình 23 và $n(A) = 10$, $n(B) = 4$ nên $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 10 + 4 = 14$.

Vậy có tất cả 14 hình vuông. ■

II – QUY TẮC NHÂN

Ví dụ 3. Bạn Hoàng có hai áo màu khác nhau và ba quần kiểu khác nhau. Hỏi Hoàng có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo ?



Hình 24

Giải. Hai áo được ghi chữ a và b, ba quần được đánh số 1, 2, 3.

Để chọn một bộ quần áo, ta phải thực hiện liên tiếp hai hành động :

Hành động 1 – chọn áo. Có hai cách chọn (chọn a hoặc b).

Hành động 2 – chọn quần. Ứng với mỗi cách chọn áo có ba cách chọn quần (chọn 1, hoặc 2, hoặc 3).

Kết quả ta có các bộ quần áo như sau : $a1$, $a2$, $a3$, $b1$, $b2$, $b3$ (h.24).

Vậy số cách chọn một bộ quần áo là $2 . 3 = 6$ (cách). ■

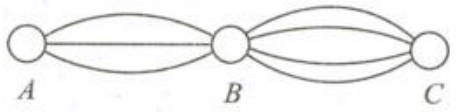
Tổng quát, ta có *quy tắc nhân* sau đây.

QUY TẮC

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

2

Từ thành phố A đến thành phố B có ba con đường, từ B đến C có bốn con đường (h.25). Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C, qua B ?



Hình 25

CHÚ Ý

Quy tắc nhân có thể mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu số điện thoại gồm :

a) Sáu chữ số bất kì ?

b) Sáu chữ số lẻ ?

Giải

a) Vì mỗi số điện thoại là một dãy gồm sáu chữ số nên để lập một số điện thoại, ta cần thực hiện sáu hành động lựa chọn liên tiếp các chữ số đó từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Có 10 cách chọn chữ số đầu tiên.

Tương tự, có 10 cách chọn chữ số thứ hai ;

...

Có 10 cách chọn chữ số thứ sáu.

Vậy theo quy tắc nhân, số các số điện thoại gồm sáu chữ số là

$$\underbrace{10.10.\ ...\ .10}_{\text{6 thừa số}} = 10^6 = 1\ 000\ 000 \text{ (số)}.$$

b) Tương tự, số các số điện thoại gồm sáu chữ số lẻ là $5^6 = 15\ 625$ (số). ■

Bài tập

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm :

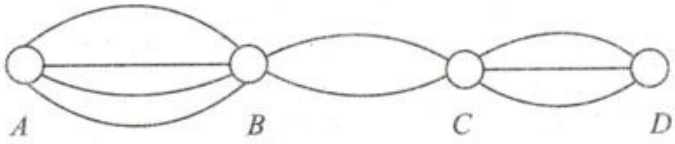
a) Một chữ số ? b) Hai chữ số ? c) Hai chữ số khác nhau ?

2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100 ?

3. Các thành phố *A*, *B*, *C*, *D* được nối với nhau bởi các con đường như Hình 26. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách đi từ *A* đến *D* mà qua *B* và *C* chỉ một lần ?

b) Có bao nhiêu cách đi từ *A* đến *D* rồi quay lại *A* ?



Hình 26

4. Có ba kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và bốn kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây ?