

# QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

## I – ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP



Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số  $y = x^3$  tại điểm  $x$  tùy ý.

Dự đoán đạo hàm của hàm số  $y = x^{100}$  tại điểm  $x$ .

Việc tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa nói chung phức tạp. Đối với một số hàm số thường gặp, ta có những công thức cho phép tính một cách nhanh chóng đạo hàm của chúng tại một điểm.

### ĐỊNH LÝ 1

Hàm số  $y = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}, n > 1$ ) có đạo hàm tại mọi  $x \in \mathbb{R}$  và

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

**Chứng minh.** Giả sử  $\Delta x$  là số gia của  $x$ , ta có :

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n \\ &= (x + \Delta x - x) [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= \Delta x [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}];\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{n \text{ số hạng}} = nx^{n-1}.$$

Vậy  $(x^n)' = nx^{n-1}$ . ■

### NHẬN XÉT

a) Đạo hàm của hàm hằng bằng 0 :  $(c)' = 0$ .

b) Đạo hàm của hàm số  $y = x$  bằng 1 :  $(x)' = 1$ .



2

Chứng minh các khẳng định trong nhận xét trên.

### ĐỊNH LÍ 2

Hàm số  $y = \sqrt{x}$  có đạo hàm tại mọi  $x$  dương và

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Chứng minh.** Giả sử  $\Delta x$  là số gia của  $x$  dương sao cho  $x + \Delta x > 0$ . Ta có

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vậy đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt{x}$  là  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . ■



3

Có thể trả lời ngay được không, nếu yêu cầu tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{x}$  tại  $x = -3$ ;  $x = 4$ ?

## II – ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

### 1. Định lí

#### ĐỊNH LÍ 3

Giả sử  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  là các hàm số có đạo hàm tại điểm  $x$  thuộc khoảng xác định. Ta có :

$$(u + v)' = u' + v' \quad (1)$$

$$(u - v)' = u' - v' \quad (2)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (3)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0). \quad (4)$$

**Chứng minh.** Ta chứng minh các công thức (1) và (2).

Xét hàm  $y = u + v$ . Giả sử  $\Delta x$  là số gia của  $x$ . Ta có số gia tương ứng của  $u$  là  $\Delta u$ , của  $v$  là  $\Delta v$  và của  $y = u + v$  là

$$\Delta y = [(u + \Delta u) + (v + \Delta v)] - (u + v) = \Delta u + \Delta v.$$

Từ đó  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$  ;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Vậy  $(u + v)' = u' + v'$ .

Chứng minh tương tự, ta có  $(u - v)' = u' - v'$ . ■

Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh được

$$(u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u'_1 \pm u'_2 \pm \dots \pm u'_n.$$

Các công thức khác được chứng minh tương tự.



4

Áp dụng các công thức trong Định lí 3, hãy tính đạo hàm của các hàm số

$$y = 5x^3 - 2x^5; y = -x^3\sqrt{x}.$$

**Ví dụ 1.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = x^2 - x^4 + \sqrt{x}$ .

**Giải.**  $(x^2 - x^4 + \sqrt{x})' = 2x - 4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . ■

**Ví dụ 2.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = x^3(\sqrt{x} - x^5)$ .

**Giải.** Ta có

$$\begin{aligned}[x^3(\sqrt{x} - x^5)]' &= (x^3)'(\sqrt{x} - x^5) + x^3(\sqrt{x} - x^5)' \\&= 3x^2(\sqrt{x} - x^5) + x^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 5x^4\right) \\&= 3x^2\sqrt{x} + x^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x^4\right).\end{aligned}\quad \blacksquare$$

## 2. Hệ quả

### HỆ QUẢ 1

Nếu  $k$  là một hằng số thì  $(ku)' = ku'$ .

### HỆ QUẢ 2

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$



5

Hãy chứng minh các hệ quả trên và lấy ví dụ minh họa.

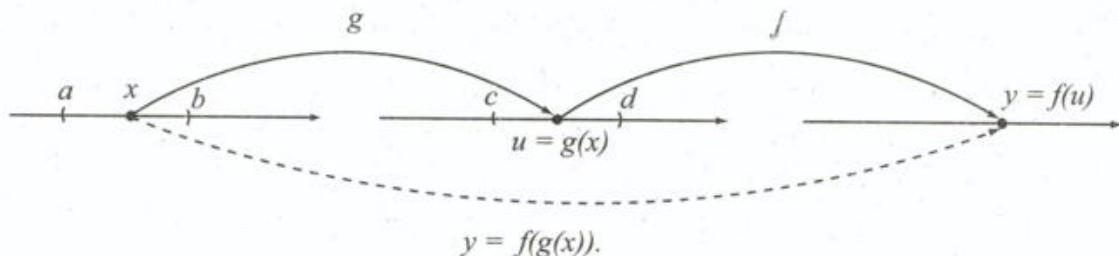
**Ví dụ 3.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = \frac{1-2x}{x+3}$ .

**Giải.** Ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-2x}{x+3}\right)' &= \frac{(1-2x)'(x+3) - (1-2x)(x+3)'}{(x+3)^2} \\&= \frac{-2(x+3) - (1-2x)}{(x+3)^2} = \frac{-7}{(x+3)^2}.\end{aligned}\quad \blacksquare$$

### III – ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

#### 1. Hàm hợp



Hình 65

Giả sử  $u = g(x)$  là hàm số của  $x$ , xác định trên khoảng  $(a ; b)$  và lấy giá trị trên khoảng  $(c ; d)$ ;  $y = f(u)$  là hàm số của  $u$ , xác định trên  $(c ; d)$  và lấy giá trị trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên  $(a ; b)$  và lấy giá trị trên  $\mathbb{R}$  theo quy tắc sau (h.65) :

$$x \mapsto f(g(x)).$$

Ta gọi hàm  $y = f(g(x))$  là hàm hợp của hàm  $y = f(u)$  với  $u = g(x)$ .

**Ví dụ 4.** Hàm số  $y = (1 - x^3)^{10}$  là hàm hợp của hàm số  $y = u^{10}$  với  $u = 1 - x^3$ .

**Ví dụ 5.** Hàm số  $y = \sin(\omega t + \gamma)$  là hàm hợp của hàm số  $y = \sin u$  với  $u = \omega t + \gamma$ ;  $\omega, \gamma$  là những hằng số.



6

Hàm số  $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$  là hàm hợp của các hàm số nào ?

#### 2. Đạo hàm của hàm hợp

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 4

Nếu hàm số  $u = g(x)$  có đạo hàm tại  $x$  là  $u'_x$  và hàm số  $y = f(u)$  có đạo hàm tại  $u$  là  $y'_u$  thì hàm hợp  $y = f(g(x))$  có đạo hàm tại  $x$  là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

**Ví dụ 6.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = (1 - 2x)^3$ .

**Giải.** Đặt  $u = 1 - 2x$  thì  $y = u^3$ ,  $y'_u = 3u^2$ ,  $u'_x = -2$ .

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot (-2) = -6u^2.$$

Vậy  $y'_x = -6(1 - 2x)^2$ . ■

**Ví dụ 7.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = \frac{5}{3x - 4}$ .

**Giải.** Đặt  $u = 3x - 4$  thì  $y = \frac{5}{u}$ .

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = -\frac{5}{u^2} \cdot 3 = \frac{-15}{(3x - 4)^2}. ■$$

### Bảng tóm tắt

$(u + v - w)'$	$= u' + v' - w'$
$(ku)'$	$= ku'$ (k là hằng số)
$(uv)'$	$= u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$= \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\left(\frac{1}{v}\right)'$	$= \frac{-v'}{v^2}$
$y'_x$	$= y'_u \cdot u'_x$

### Bài tập

1. Bằng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a)  $y = 7 + x - x^2$  tại  $x_0 = 1$  ;

b)  $y = x^3 - 2x + 1$  tại  $x_0 = 2$ .

2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a)  $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$  ;

b)  $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$  ;

c)  $y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1$  ;

d)  $y = 3x^5(8 - 3x^2)$ .

3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a)  $y = (x^7 - 5x^2)^3$  ;

b)  $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$  ;

c)  $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$  ;

d)  $y = \frac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$  ;

e)  $y = \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^3$  ( $m, n$  là các hằng số).

4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a)  $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$  ;

b)  $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$  ;

c)  $y = \frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  ( $a$  là hằng số) ;

d)  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ .

5. Cho  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ . Tìm  $x$  để :

a)  $y' > 0$  ;

b)  $y' < 3$ .