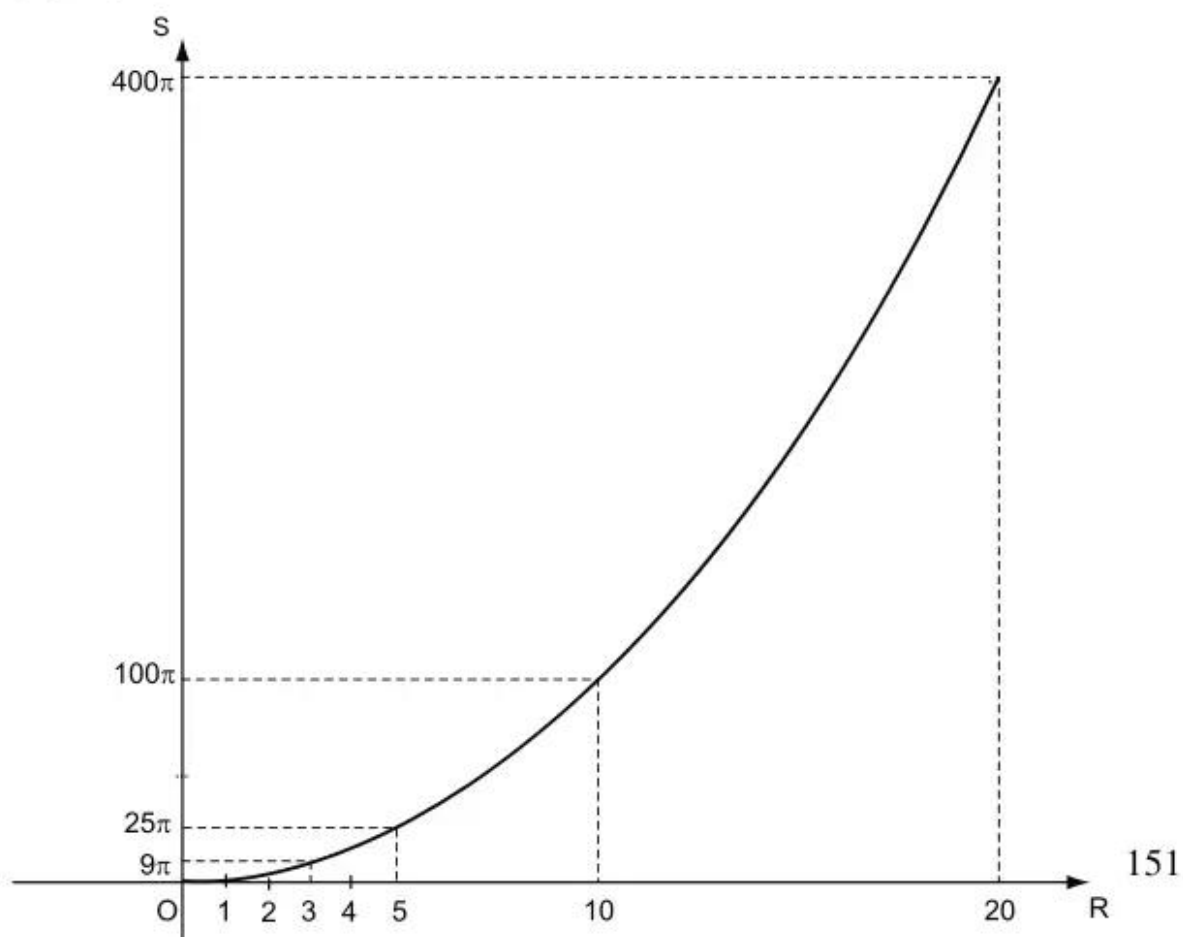


§10. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn

63. a)

R	0	1	2	3	4	5	10	20
S	0	π	4π	9π	16π	25π	100π	400π

b) (h.71)



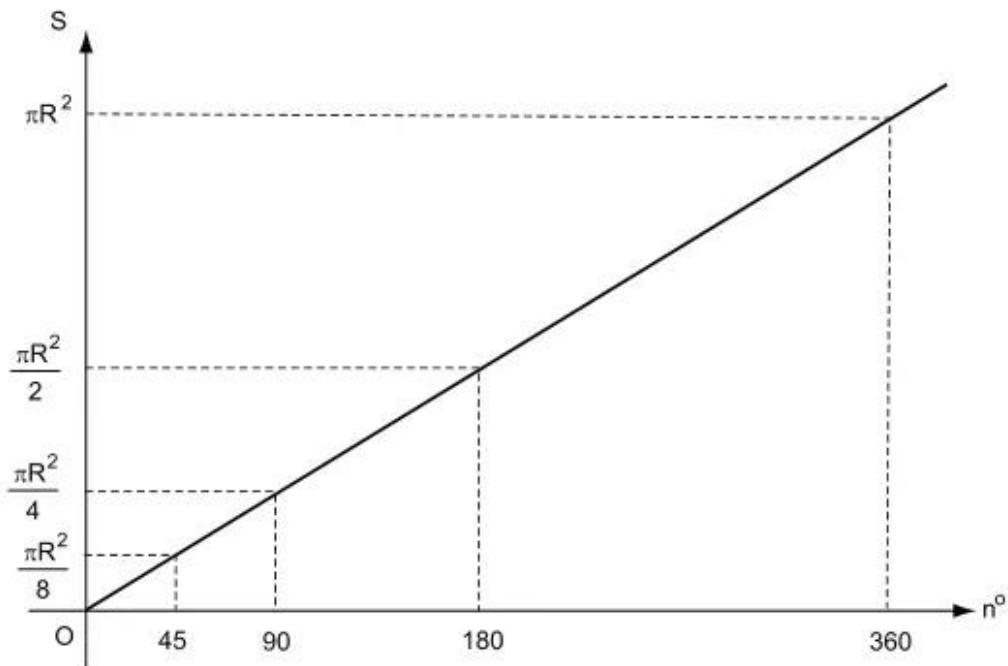
Hình 71

c) Diện tích hình tròn không tỉ lệ thuận với bán kính hình tròn.

64. a)

n°	0	45	90	180	360
$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$	0	$\frac{\pi R^2}{8}$	$\frac{\pi R^2}{4}$	$\frac{\pi R^2}{2}$	πR^2

b) (h.72)



Hình 72

c) Diện tích hình quạt tròn tỉ lệ thuận với số đo độ của cung.

65. Gọi bán kính và diện tích của hình tròn lần lượt là R và S.

Biết chu vi hình tròn là $C = 2\pi R$ suy ra $R = \frac{C}{2\pi}$,
 từ đó ta tính được diện tích hình tròn là

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{C}{2\pi} \right)^2 = \frac{C^2}{4\pi}.$$

66. (h.73) Hình để trống là $\frac{1}{2}$ hình tròn bán kính 2cm

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

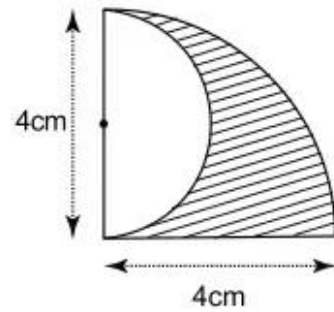
Diện tích cả hai hình là $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính 4cm

$$S = \frac{1}{4} \pi \cdot 4^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 16 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích phần gạch sọc là

$$S_2 = S - S_1 = 4\pi - 2\pi = 2\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy $S_1 = S_2 (= 2\pi \text{ cm}^2)$.



Hình 73

67. (h.74) a) Cách vẽ :

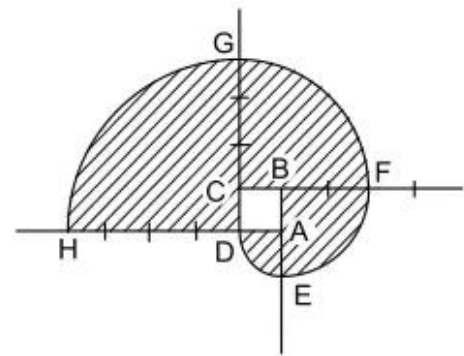
Vẽ hình vuông ABCD, cạnh 1cm.

Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm A, bán kính 1cm, ta được cung DE.

Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm B, bán kính 2cm, ta được cung EF.

Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm C, bán kính 3cm, ta được cung FG.

Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm D, bán kính 4cm, ta được cung GH.



Hình 74

b) Tính diện tích phần gạch sọc.

$$\text{Diện tích hình quạt DAE} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2$$

$$\text{Diện tích hình quạt EBF} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$$

$$\text{Diện tích hình quạt FCG} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 3^2$$

$$\text{Diện tích hình quạt GDH} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích phần gạch sọc } S &= \frac{1}{4} \pi (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \\ &= \frac{15}{2} \pi \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

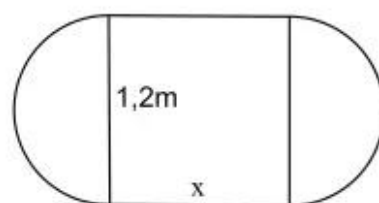
68. (h.75) a) Gọi kích thước kia của mặt hình chữ nhật là x (m), $x > 0$.

$$\text{Ta có } 1,2 \times x + \pi(0,6)^2 = 2 \times \pi(0,6)^2.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\pi(0,6)^2}{1,2} = 0,3\pi \approx 0,942 \text{ (m).}$$

$$\text{b) } 1,2 \times \pi + 2x = 2 \times 1,2 \times \pi.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1,2 \times \pi}{2} \approx 1,884 \text{ (m).}$$



Hình 75

69. Gọi số đo của ba cung là x, y, z , ta có

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{3+4+5} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

$$\text{Suy ra } x = 30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$$

$$y = 30^\circ \cdot 4 = 120^\circ$$

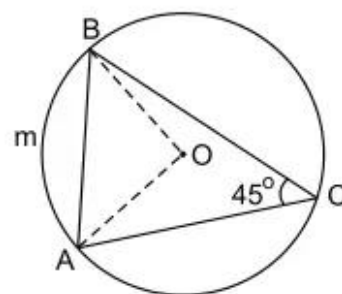
$$z = 30^\circ \cdot 5 = 150^\circ.$$

Diện tích các hình quạt tròn ứng với các cung $90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ theo thứ tự là :

$$S_1 = \frac{\pi R^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi R^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}, \quad S_3 = \frac{\pi R^2 \cdot 150}{360} = \frac{5\pi R^2}{12}.$$

70. (h.76) $\widehat{C} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$.

a) Diện tích hình quạt tròn AOB là



$$\frac{\pi R^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

b) Diện tích tam giác vuông AOB là

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{R^2}{2}.$$

Diện tích hình viên phân AmB là

$$\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4} (\pi - 2).$$

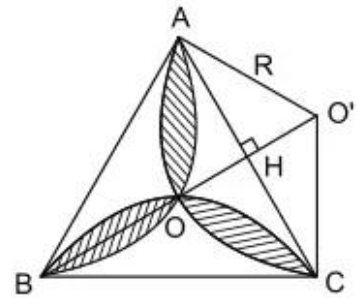
Hình 76

71. (h.77) Diện tích hình hoa thị bằng tổng diện tích ba hình viên phân trừ đi diện tích của tam giác đều.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Ta thấy $OA = OB = OC$, mặt khác OA, OB, OC lần lượt là phân giác của các góc A, B, C, từ đó

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \quad \text{và}$$

$$\widehat{AOC} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ.$$



Hình 77

Vậy hình viên phân AOC ứng với cung 120° , dây AC là cạnh tam giác đều nội tiếp đường tròn tâm O' , bán kính R (đường tròn đi qua ba điểm A, O, C).

Từ đó $AC = R\sqrt{3}$, suy ra $R = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích hình quạt tròn $AO'C$ là

$$S_{\text{quạt}} = \frac{\pi \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi a^2}{9}.$$

Tam giác $O'AC$ có $O'H = \frac{1}{2} O'A$ (vì tam giác $O'AH$ là nửa tam giác đều) nên

$$O'H = \frac{a}{2\sqrt{3}} \text{ và } S_{O'AC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}.$$

Diện tích hình viên phân AOC là

$$S_{AOC} = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2}{4\sqrt{3}}.$$

Diện tích tam giác đều ABC cạnh a là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích hình hoa thị là

$$\begin{aligned} S &= 3S_{AOC} - S_{ABC} \\ &= 3 \cdot \left(\frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2}{4\sqrt{3}} \right) - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\pi a^2}{3} - \frac{3a^2}{4\sqrt{3}} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Vậy
$$S = \frac{a^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

72. (h.78) a) Trong tam giác vuông ABC, ta có

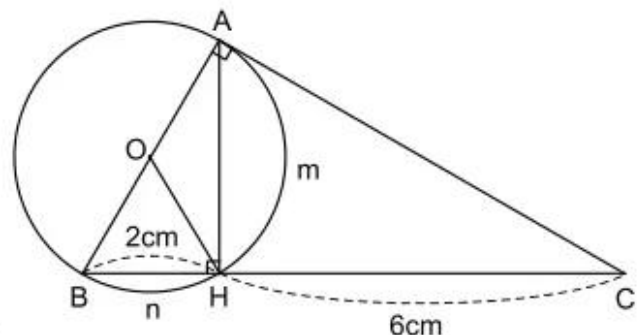
$$AB^2 = BH \cdot BC. \text{ Thay số}$$

$$AB^2 = 2(2 + 6) = 16$$

$$AB = 4 \text{ (cm).}$$

Do đó diện tích hình tròn (O) bằng

$$\pi \cdot \left(\frac{AB}{2} \right)^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 78

b) Tổng diện tích hai hình viên phân AmH và BnH là hiệu diện tích của nửa hình tròn (O) và diện tích tam giác vuông AHB.

Theo định lí Py-ta-go, trong tam giác vuông AHB ta có

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Diện tích tam giác vuông AHB là

$$\frac{BH \cdot AH}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích nửa đường tròn (O) là $4\pi : 2 = 2\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Do đó tổng diện tích hai hình viên phân là

$$2\pi - 2\sqrt{3} = 2(\pi - \sqrt{3}) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

c) Tam giác BOH có $OB = OH = BH = 2\text{cm}$ nên là tam giác đều, do đó $\widehat{BOH} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{AOH} = 120^\circ$.

Vậy diện tích hình quạt tròn AOH là

$$\frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120}{360} = \frac{4\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài tập bổ sung

10.1. Hình đó gồm một nửa hình tròn bán kính $5R$, thêm 3 nửa hình tròn có bán kính R và bớt 2 nửa hình tròn có bán kính R .

Do đó, diện tích của hình đã cho là

$$S = \frac{\pi \cdot (5R)^2}{2} + 3 \cdot \frac{\pi R^2}{2} - 2 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 13\pi R^2.$$

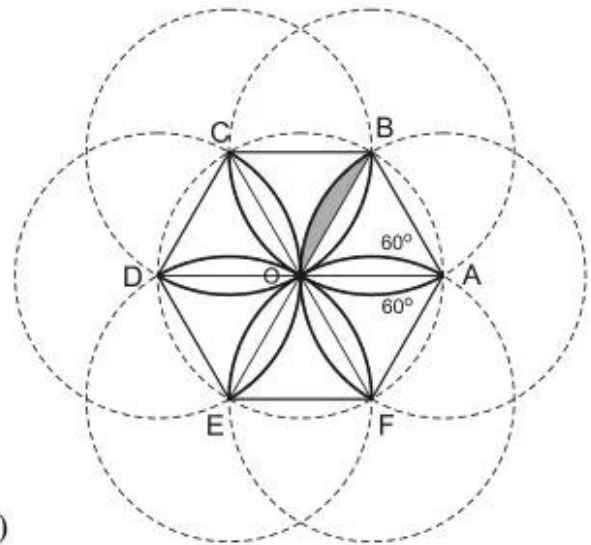
10.2. Xem hình vẽ (h.bs.27).

Ta có 12 hình viên phân có diện tích bằng nhau tạo nên cánh hoa đó.

Xét một hình viên phân, chẳng hạn hình viên phân giới hạn bởi cung BO và dây căng cung ấy, thì BO là cung của một đường tròn tâm A bán kính R với góc ở tâm là 60° , nên diện tích hình viên phân đó là

$$S' = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60}{360} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$

Vậy diện tích cần tìm là $S = R^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.



Hình bs.27