

§2. Hình nón. Hình nón cụt. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt

14. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh cạnh huyền BC, ta được hai hình nón có các đáy "úp vào nhau", bán kính đường tròn đáy bằng đường cao AH kẻ từ A đến cạnh huyền BC.

Để thấy $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị độ dài).

- Diện tích xung quanh của hình tạo thành

$$S = \pi AH(AB + AC) = \frac{\pi a^2(3 + \sqrt{3})}{2} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

- Thể tích của hình tạo thành

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot AH^2 \cdot BC = \frac{\pi a^3}{2} \text{ (đơn vị thể tích).}$$

15. Hãy quan sát kĩ hình vẽ ở đề bài.

Chọn (A).

16. *Trả lời.* Cụ Bá đã uống $\frac{7}{8}$ lượng rượu trong cốc.

Để ý rằng lượng rượu còn lại sau khi uống là $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ (thể tích ban đầu).

17. Thể tích hình nón có đường kính đáy bằng 0,2m là

$$\frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{0,2}{2}\right)^2 \cdot 0,2 = \frac{0,002\pi}{3} \text{ (m}^3\text{)} = \frac{2000\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích hình nón có đường kính đáy bằng 0,1m là

$$\frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{0,1}{2}\right)^2 \cdot 0,1 = \frac{0,00025\pi}{3} \text{ (m}^3\text{)} = \frac{250\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích nước chứa đầy xô là

$$\frac{2000\pi}{3} - \frac{250\pi}{3} = \frac{1750\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn (B).

18. Diện tích xung quanh hình nón

$$7 \cdot \frac{22}{7} \cdot 10 = 220 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích đáy hình nón

$$7^2 \cdot \frac{22}{7} = 154 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích toàn phần hình nón

$$220 + 154 = 374 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Chọn (D).

19. a) Khi quay hình bình hành ABCD một vòng quanh cạnh AB thì diện tích S bằng diện tích xung quanh của hình trụ (do CDHK tạo ra) cộng với hai lần diện tích xung quanh của hình nón (do AHD tạo ra) (h.117).

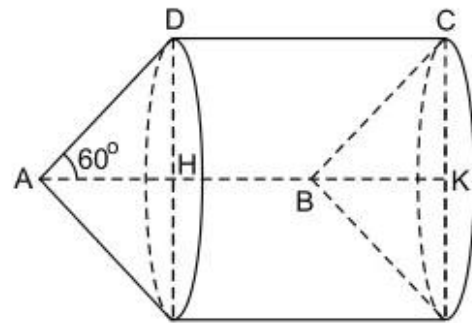
$$S = 2\pi \cdot DH \cdot DC + 2\pi AD \cdot DH =$$

$$= 2\pi DH(DC + AD).$$

Ta có $DH = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $S = \pi x \sqrt{3} (1 + x)$.

Tương tự như vậy, bạn đọc cũng tính được $S_1 = \sqrt{3}\pi (x + 1)$.



Hình 117

- b) Để có $S = S_1$ thì phải có $\pi x \sqrt{3} (1 + x) = \sqrt{3} \pi (x + 1)$ suy ra
- $$x(1 + x) = 1 + x \text{ hay } (1 + x)(x - 1) = 0.$$

Vì x là số đo độ dài cạnh nên $x = 1$.

Tương tự, để có $S = 2S_1$ thì $x = 2$.

20. Thể tích hình nón là

$$\frac{1}{3} \pi \left(\frac{m}{2} \right)^2 \cdot 2l = \frac{\pi m^2 l}{6}.$$

Thể tích hình trụ là

$$\pi m^2 2l = 2\pi m^2 l.$$

Thể tích hình nón so với thể tích hình trụ bằng

$$\frac{\frac{\pi m^2 l}{6}}{2\pi m^2 l} = \frac{1}{12}.$$

Vậy khi mức đầy nước vào hình nón và đổ vào hình trụ thì độ cao của nước trong hình trụ là $\frac{1}{6} l$.

Chọn (A).

21. Gọi r là bán kính đáy của hình nón, h là độ dài đường cao.

Thể tích hình nón là $\frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Thể tích hình nón mới sau khi chiều cao, bán kính đáy đều tăng lên là

$$\frac{1}{3} \pi \left(\frac{5}{4} r \right)^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^3.$$

Tỉ số giữa thể tích của hình nón mới và thể tích của hình nón ban đầu là

$$\frac{\frac{1}{3} \pi r^2 h \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^3}{\frac{1}{3} \pi r^2 h} = \frac{125}{64}.$$

Chọn (D).

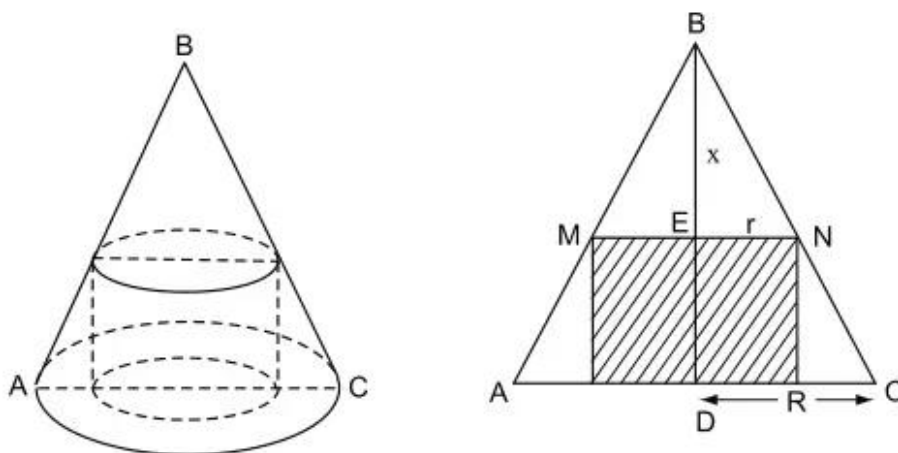
22. (h.118) Đặt $BE = x$ thì có $\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}$ hay $\frac{r}{R} = \frac{x}{h}$

$$\Rightarrow r = \frac{Rx}{h}.$$

Thể tích hình trụ là

$$V = \pi \cdot \frac{R^2 x^2}{h^2} (h - x).$$

Ta có $\frac{2Vh^2}{\pi R^2} = x^2(2h - 2x).$



Hình 118

Vì h, π, R là các hằng số nên V sẽ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2(2h - 2x)$ lớn nhất. Vì $x + x + (2h - 2x) = 2h$ (là hằng số) nên tích của nó $x^2(2h - 2x)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = 2h - 2x$ hay $x = \frac{2}{3}h$.

Chú ý. Ta có thể chứng minh được mệnh đề : "Tổng ba số dương là không đổi thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau".

Một chứng minh đơn giản bằng phương pháp hình học cho hai số như sau :

Dựng đường tròn đường kính $a + b$ (h.119), trong đó MB là một nửa dây cung của đường tròn có bán kính cố định $\left(r = \frac{a + b}{2}\right)$. Khi đó $MB^2 = ab$, do vậy nửa dây cung lớn nhất là bán kính.

23. Thể tích hình nón là $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn (B).

24. Thể tích hình trụ là

$$1^2 \pi \cdot 2 = 2\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích hình nón là

$$\frac{1}{3} \cdot 1^2 \pi \cdot 2 = \frac{2\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Phần thể tích còn lại của hình trụ là

$$2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn (B).

25. Gọi độ dài các cạnh của tam giác là $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$ và $AH = h$ là chiều cao dựng từ đỉnh A xuống cạnh huyền BC.

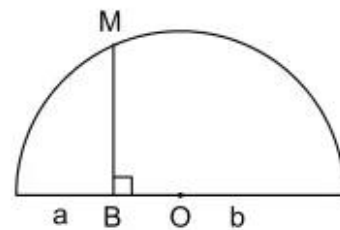
Ta có $h = \frac{bc}{a}$. Theo đầu bài thì

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot AH^2 \cdot HC + \frac{1}{3} \pi \cdot AH^2 \cdot HB = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = \frac{\pi b^2 c^2}{3a},$$

suy ra $\frac{1}{V_1^2} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}$

Tương tự

$$\frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2} \quad \text{và} \quad \frac{1}{V_3^2} = \frac{9}{\pi^2 b^2 c^4}, \text{ từ đây ta có}$$



Hình 119

$$\begin{aligned}\frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2} &= \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2} + \frac{9}{\pi^2 b^2 c^4} \\ &= \frac{9(b^2 + c^2)}{\pi^2 b^4 c^4} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}.\end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}$.

26. Thể tích hình trụ là $m^2 \pi k$.

Thể tích hình nón là $\frac{1}{3} m^2 \pi k$.

Thể tích của hình nón bằng $\frac{1}{3}$ thể tích hình trụ.

Do đó, khi chứa đầy cát trong hình nón đổ hết vào hình trụ thì độ cao của cát trong hình trụ là $\frac{k}{3}$.

Chọn (B).