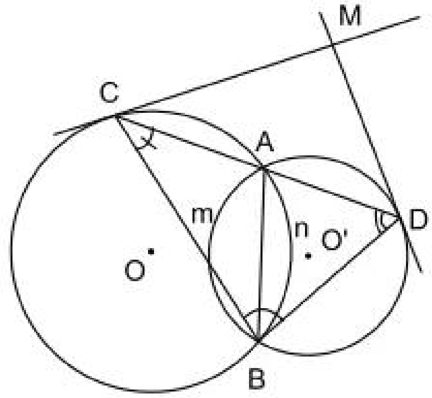
§4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây



Hình 34

24. (h.34) a) Trong tam giác CBD, ta có :

$$\widehat{C} = \frac{sđ\overset{\frown}{AnB}}{2}$$

$$\widehat{D} = \frac{sđ\overset{\frown}{AmB}}{2}$$

Vì $\overset{\frown}{AnB}$ và $\overset{\frown}{AmB}$ cố định nên $\widehat{C}, \widehat{D}$ có giá trị không đổi, suy ra $\widehat{CBD}$ có giá trị không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến CAD khi cát tuyến đó quay xung quanh điểm A.

b) Gọi M là giao điểm của hai tia tiếp tuyến tại C và D của (O) và (O').

Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{ACM}$ (1) (cùng chắn cung nhỏ CA của (O)),

$\widehat{ABD} = \widehat{ADM}$ (2) (cùng chắn cung nhỏ DA của (O')).

Cộng (1) và (2) vế với vế được

$$\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = \widehat{ACM} + \widehat{ADM} = \widehat{CBD} \text{ (không đổi).}$$

Suy ra $\widehat{CMD}$ không đổi (tổng các góc trong một tam giác bằng 180^o).

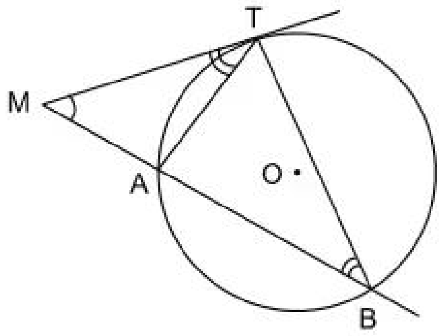
25. (h.35) a) Xét hai tam giác BMT và TMA.

Chúng có $\widehat{M}$ chung,

$\widehat{B} = \widehat{MTA}$ (cùng chắn cung nhỏ AT)

nên $\Delta BMT \backsim \Delta TMA$, suy ra

$$\frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT} \text{ do đó } MT^2 = MA.MB.$$



Hình 35

Vì cát tuyến MAB kẻ tuỳ ý nên ta luôn có $MT^2 = MA.MB$ không phụ thuộc vị trí của cát tuyến MAB.

b) (h.36) Gọi bán kính đường tròn là R.

$$MT^2 = MA.MB$$

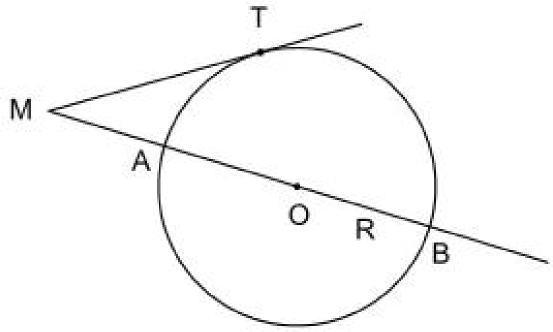
$$MT^2 = (MB - 2R).MB.$$

Thay số ta có

$$20^2 = (50 - 2R).50$$

$$400 = 2500 - 100R$$

$$R = 21 \text{ (cm).}$$



Hình 36

26. (h.37) Áp dụng kết quả bài 25, ta có

$$MT^2 = MA.MB$$

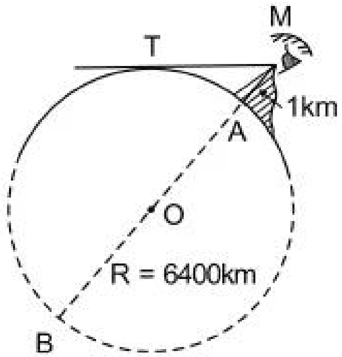
$$MT^2 = MA(MA + 2R).$$

Thay số, ta có

$$MT^2 = 1(1 + 12800)$$

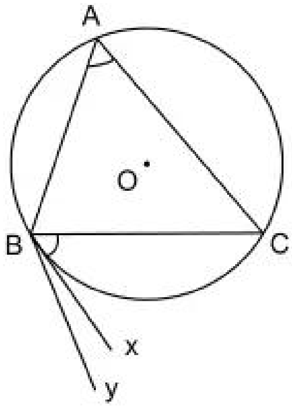
$$MT^2 = 12801$$

$$MT \approx 113,1 \text{ (km)}.$$

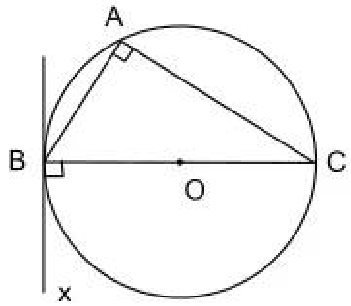


Hình 37

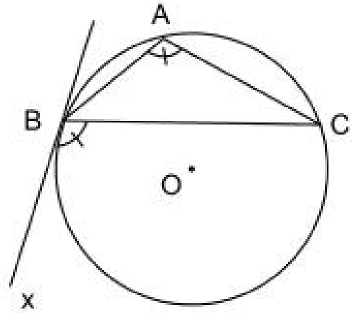
27.



Hình 38



Hình 39



Hình 40

Cách thứ nhất (h.38, 39, 40)

Giả sử Bx không phải là tiếp tuyến của (O), ta vẽ tia By là tiếp tuyến của (O) tại B, hai tia Bx và By cùng nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ chứa BC. Ta có

$\widehat{CBy} = \widehat{BAC}$ (định lí về số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung),

$\widehat{CBx} = \widehat{BAC}$ (giả thiết).

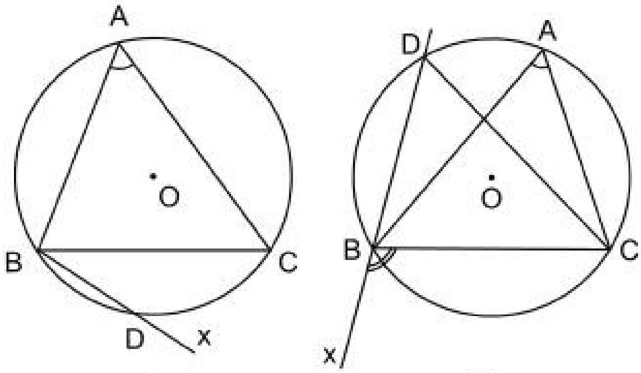
Từ đó $\widehat{CBy} = \widehat{CBx}$, tức là hai tia By và Bx khác nhau tạo với tia BC cùng một góc. Điều này trái với tính chất đã được công nhận ở lớp 6 (tiên đề về đặt tia trên nửa mặt phẳng). Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng điều giả sử Bx không phải là tiếp tuyến là sai, suy ra Bx là tiếp tuyến của (O).

Cách thứ hai (h.41a)

Giả sử Bx không phải là tiếp tuyến, thì nó là cát tuyến, khi đó nó cắt cung nhỏ BC tại D và $\widehat{CBx}$ là góc nội tiếp chắn cung CD.

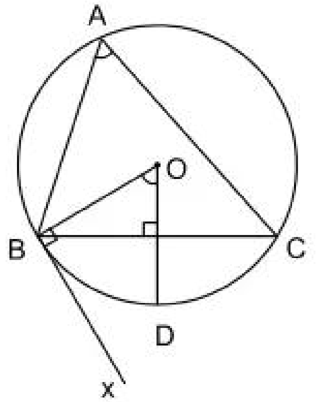
$$\widehat{CBx} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{DC}\ \left(< \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}\right)$$

tức là $\widehat{CBx} < \widehat{BAC}$. Điều này trái với giả thiết. Vậy Bx là tiếp tuyến của (O) tại B (có thể tia Bx không cắt cung nhỏ BC, mà tia đối của tia Bx cắt cung lớn BC tại D (h.41b). Khi đó dễ dàng chứng minh rằng $\widehat{CBx} > \widehat{BAC}$ (trái với giả thiết)).



a) b)

Hình 41



Hình 42

Cách thứ ba (h.42)

Gọi D là điểm chính giữa của cung BC, khi đó $\widehat{BOD} = \widehat{A}$, theo giả thiết thì $\widehat{A} = \widehat{CBx}$, suy ra $\widehat{BOD} = \widehat{CBx}$.

Mặt khác $\widehat{BOD} + \widehat{CBO} = 90^o$ nên $\widehat{CBx} + \widehat{CBO} = 90^o$. Vậy Bx $\perp$ BO hay Bx là tiếp tuyến của (O) tại B.

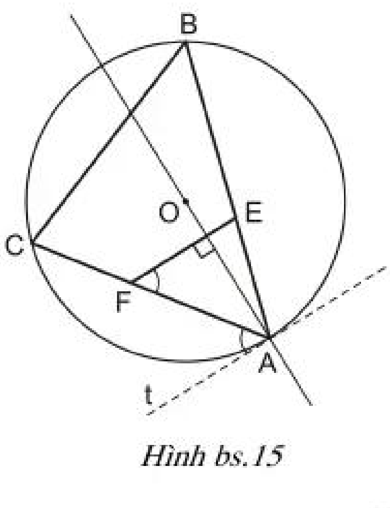
Bài tập bổ sung

4.1. Xem hình vẽ (h.bs.15).

Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn (O).
Khi đó, FE song song với At nên ta có $\widehat{EFA} = \widehat{FAt}$ *(so le trong).*

Mặt khác, $\widehat{CAt} = \widehat{CBA}$ *(cùng bằng nửa số đo cung nhỏ CA).*

Mà $\widehat{EFA} + \widehat{EFC} = 180^o$ *(kề bù), suy ra* $\widehat{CBE} + \widehat{EFC} = 180^o$.



Hình bs.15

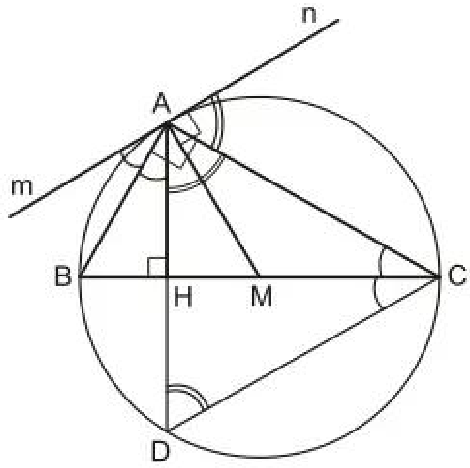
Vì tổng các góc trong tứ giác bằng 360^o *mà* $\widehat{CBE} + \widehat{EFC} = 180^o$ *nên suy ra* $\widehat{BCF} + \widehat{BEF} = 180^o$.

4.2. Xem hình vẽ (h.bs.16).

Ta có MA = MB = MC nên đường tròn tâm M bán kính MA đi qua A, B và C.

Gọi D là giao điểm của AH với đường tròn vừa dựng thì hai cung nhỏ BA, BD bằng nhau, đồng thời hai cung nhỏ CA, CD bằng nhau.

Do mn là tiếp tuyến tại A của đường tròn, dựa vào tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung suy ra $\widehat{mAB} = \widehat{ACB} = \widehat{BCD} = \widehat{BAH}$.



Hình bs.16

Tương tự, chứng minh được $\widehat{CAH} = \widehat{CDA} = \widehat{CAn}$.

Vậy, AB là tia phân giác của $\widehat{mAH}$ *và AC là tia phân giác của* $\widehat{nAH}$.