§5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

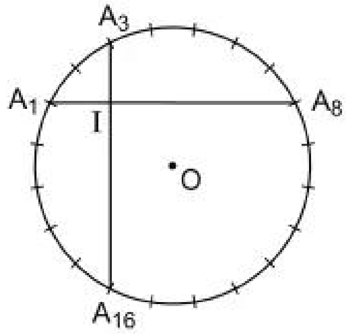
28. (h.43) Đường tròn được chia thành 20 cung bằng nhau, vậy số đo mỗi cung là $360^o : 20 = 18^o$.

Gọi giao điểm của hai dây A_1A_8 và A_3A_{16} là I.

$$\widehat{A_1IA_3} = \frac{sđ\overset{\frown}{A_1A_3} + sđ\overset{\frown}{A_8A_{16}}}{2}$$

$$= \frac{18^o.2 + 18^o.8}{2} = 90^o.$$

Vậy $A_1A_8 \perp A_3A_{16}$.



Hình 43

29. (h.44) Góc C có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, nên

$$\widehat{C} = \frac{sđ\overset{\frown}{AmB} - sđ\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{sđ\overset{\frown}{ADB} - sđ\overset{\frown}{AD}}{2}$$

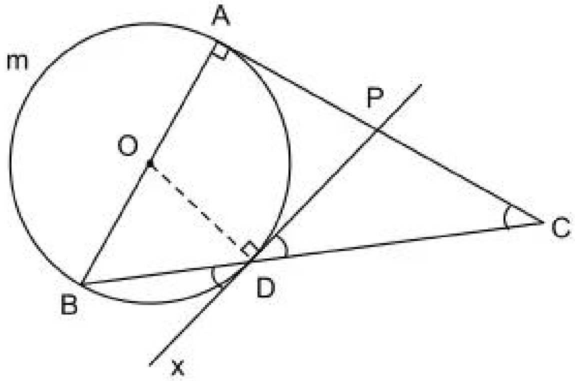
do đó $\widehat{C} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{BD}}{2}$. (1)

$\widehat{CDP} = \widehat{BDx}$ (hai góc đối đỉnh) ; (2)

$\widehat{BDx} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{BD}}{2}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây). (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{C} = \widehat{CDP}$

suy ra tam giác CPD cân, do đó PD = PC.



Hình 44

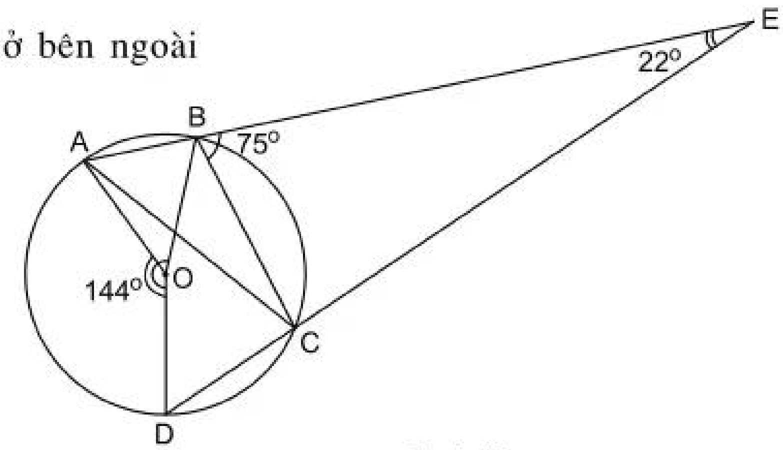
30. (h.45) $\widehat{E}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, nên

$$\widehat{E} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{AD} - sđ\,\overset{\frown}{BC}}{2}$$

hay $22^o = \dfrac{144^o - sđ\overset{\frown}{BC}}{2}$.

Suy ra

$sđ\overset{\frown}{BC} = 144^o - 2 \times 22^o = 100^o$.



Hình 45

Do đó $\widehat{BAC} = 50^o$. (1)

Mặt khác $\widehat{CBE} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ (góc ngoài của tam giác)

hay $75^o = 50^o + \widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 75^o - 50^o = 25^o$

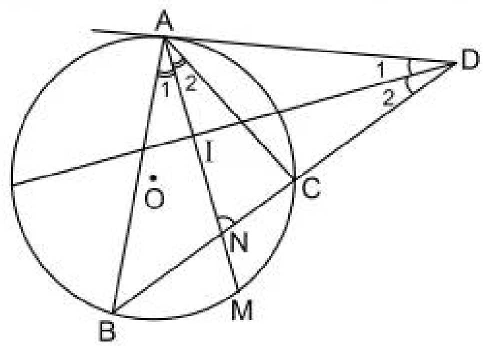
hay sđ $\overset{\frown}{AB} = 50^o$ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn).

Vậy $\widehat{AOB} = 50^o$. (2)

So sánh (1) và (2), ta có $\widehat{AOB} = \widehat{BAC}$.

31. (h.46) Gọi giao điểm của AM và BC là N, ta có

$$\widehat{AND} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{AC} + sđ\,\overset{\frown}{BM}}{2}.$$



Hình 46

Nhưng $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$ (vì AM là tia phân giác)

nên $\widehat{AND} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{AC} + sđ\,\overset{\frown}{CM}}{2} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{AM}}{2}$. (1)

Mặt khác $\widehat{NAD} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{AM}}{2}$ (2) (góc tạo bởi tia tiếp tuyến AD và dây AM).

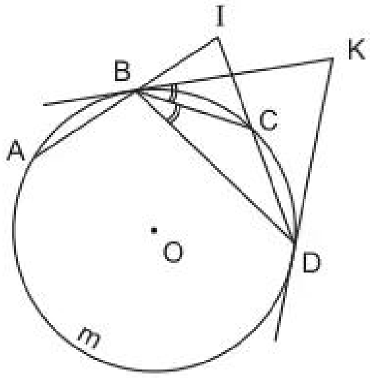
So sánh (1) và (2) ta có $\widehat{AND} = \widehat{NAD}$ hay tam giác DAN cân tại D, suy ra tia phân giác DI đồng thời là đường cao. Do đó DI $\perp$ AM.

32. (h.47) a) Theo giả thiết ta có

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}. \quad (1)$$

$\widehat{BIC}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, nên

$$\widehat{BIC} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{AmD} - sđ\,\overset{\frown}{BC}}{2}. \quad (2)$$



Hình 47

$\widehat{BKD}$ cũng là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (hai cạnh là tiếp tuyến của đường tròn), nên

$$\widehat{BKD} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{BAD} - sđ\,\overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{sđ\,(\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AmD}) - sđ(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD})}{2}.$$

Do (1), ta có

$$\widehat{BKD} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{AmD} - sđ\,\overset{\frown}{BC}}{2}. \quad (3)$$

So sánh (2) và (3) suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BKD}$.

b) $\widehat{KBC}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây nên

$$\widehat{KBC} = \frac{sđ\overset{\frown}{BC}}{2}. \quad (4)$$

$\widehat{CBD}$ là góc nội tiếp nên

$$\widehat{CBD} = \frac{sđ\overset{\frown}{CD}}{2}. \quad (5)$$

Từ (1), (4), (5) suy ra $\widehat{KBC} = \widehat{CBD}$ hay BC là tia phân giác của $\widehat{KBD}$.

Chú ý. Không yêu cầu chứng minh tia nằm giữa.

• Giả thiết AB = BC = CD (nhỏ hơn R) để có hình vẽ như trên. Không yêu cầu biện luận về điều kiện "nhỏ hơn R".

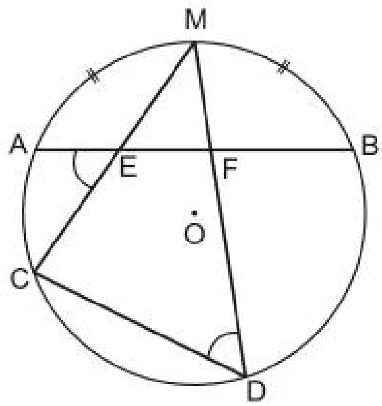
Bài tập bổ sung

5.1. Xem hình vẽ (h.bs.17).

Ta có cung AM và MB bằng nhau, suy ra tổng số đo của hai cung (nhỏ) MA và AC bằng tổng số đo của hai cung (nhỏ) MB và AC. Suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{CDM}$ *(cùng bằng nửa tổng số đo của hai cung nhỏ MA và AC).*

Mà $\widehat{AEC} + \widehat{FEC} = 180^o$ *(kề bù), suy ra* $\widehat{CDF} + \widehat{FEC} = 180^o$.

Vì tổng các góc trong tứ giác bằng 360^o *mà* $\widehat{CDF} + \widehat{FEC} = 180^o$ *nên suy ra* $\widehat{EFD} + \widehat{ECD} = 180^o$.



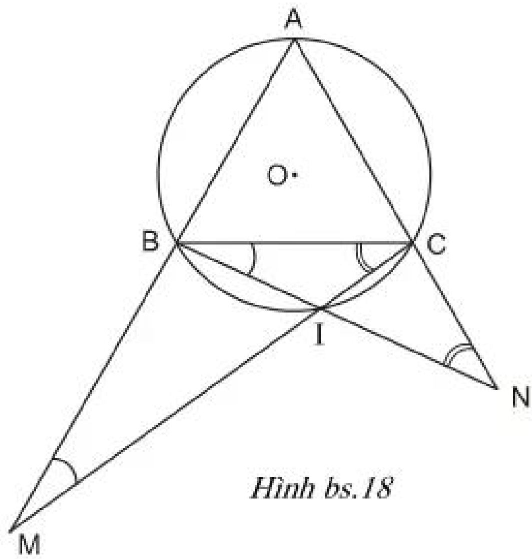
Hình bs.17

5.2. Xem hình vẽ (h.bs.18).

Theo giả thiết các cung (nhỏ) AB, BC, CA bằng nhau.

a) Ta có sđ $\overset{\frown}{BI}$ = *sđ* $\overset{\frown}{BC}$ − *sđ* $\overset{\frown}{CI}$ = *sđ* $\overset{\frown}{AB}$ − *sđ* $\overset{\frown}{CI} \Rightarrow \widehat{BCI} = \widehat{ANB}$.

b) Ta có sđ $\overset{\frown}{CI}$ = *sđ* $\overset{\frown}{BC}$ − *sđ* $\overset{\frown}{BI}$ = *sđ* $\overset{\frown}{AC}$ − *sđ* $\overset{\frown}{BI} \Rightarrow \widehat{CBI} = \widehat{AMC}$.



Hình bs.18