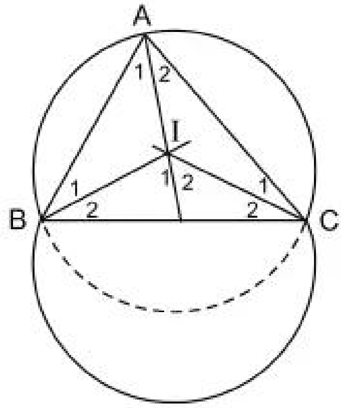
§6. Cung chứa góc

33. (h.48) Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$$\widehat{I_1} = \widehat{B_1} + \widehat{A_1} \qquad (1)$$

$$\widehat{I_2} = \widehat{C_1} + \widehat{A_2}. \qquad (2)$$



Hình 48

Cộng (1) và (2) vế với vế, ta có

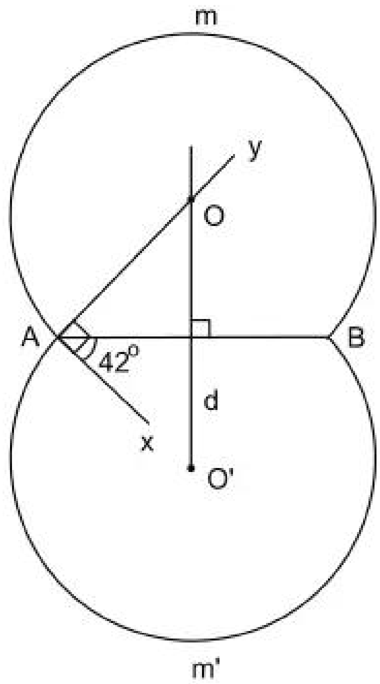
$$\widehat{I_1} + \widehat{I_2} = \underbrace{\widehat{B_1} + \widehat{A_1} + \widehat{C_1}}_{} + \widehat{A_2}$$

hay $\widehat{BIC} = 90^o + \widehat{A_2}$.

Vậy $\widehat{BIC} = 90^o + \dfrac{\alpha}{2}$ không đổi.

Điểm I nhìn đoạn thẳng BC cố định dưới góc $90^o + \dfrac{\alpha}{2}$ không đổi nên quỹ tích của I là cung chứa góc $90^o + \dfrac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC (hai cung đối xứng nhau qua đường thẳng BC).

34. (h.49) Trình tự dựng như sau :



Hình 49

Dựng AB = 3cm ;

Dựng $\widehat{BAx} = 42^o$;

Dựng Ay vuông góc với Ax tại A ;

Dựng đường trung trực d của AB ;

Gọi O là giao điểm của d và Ay.

Dựng cung tròn AmB tâm O bán kính OA.

Dựng cung tròn Am'B đối xứng với $\overset{\frown}{AmB}$ qua đường thẳng AB.

35. (h.50) Trình tự dựng gồm các bước sau :

• Dựng đoạn thẳng BC = 3cm.

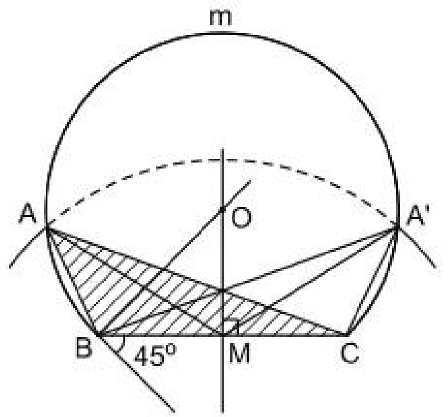
• Dựng cung chứa góc 45^o trên đoạn thẳng BC (cung BmC).

• Gọi M là trung điểm của BC.

Dựng đường tròn tâm M, bán kính 2,5cm.

Đường tròn này cắt $\overset{\frown}{BmC}$ tại A và A'.

Tam giác ABC (hoặc A'BC) là tam giác thoả mãn yêu cầu đề bài (BC = 3cm, $\widehat{A} = 45^o$, trung tuyến AM = 2,5cm).



Hình 50

36. (h.51)

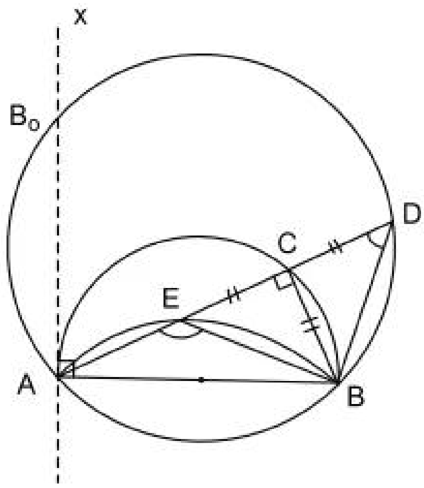
a) *Quỹ tích điểm* D

• *Phần thuận.* Ta có :

AB cố định

$\widehat{ADB} = 45^o$ (vì tam giác BCD vuông cân).

Vậy khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB thì D chuyển động trên cung chứa góc 45^o dựng trên đoạn thẳng AB cố định.



Hình 51

• *Giới hạn quỹ tích*

Dây AC thay đổi phụ thuộc vị trí điểm C trên nửa đường tròn đường kính AB cố định ; AC lớn nhất, bằng đường kính của nửa đường tròn, khi C trùng với B, khi đó D cũng trùng với B, vậy B thuộc quỹ tích. AC nhỏ nhất bằng 0 khi C trùng với A, khi đó D trùng với B_o (B_o là giao điểm của cung chứa góc 45^o và tia tiếp tuyến Ax tại A của nửa đường tròn).

• *Phần đảo.* Lấy điểm D' tuỳ ý trên cung BB_o, nối AD' cắt nửa đường tròn đường kính AB tại C'. Khi đó ta dễ dàng chứng minh được C'D' = C'B.

• *Kết luận.* Quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn là cung BB_o nằm trên cung chứa góc 45^o dựng trên đoạn thẳng AB, trong nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C (bị giới hạn bởi tiếp tuyến Ax).

b) *Quỹ tích điểm* E

• *Phần thuận.* Ta có :

AB cố định

$\widehat{AEB} = 135^o$ (góc ngoài của tam giác vuông cân BCE).

Vậy khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB thì E chuyển động trên cung chứa góc 135^o dựng trên đoạn thẳng AB cố định.

• *Phần đảo*

Lấy điểm E' bất kì trên cung chứa góc 135^o. Tia AE' cắt nửa đường tròn tại C'. Vì $\widehat{AE'B}$ là góc ngoài của tam giác vuông BC'E', mà $\widehat{AE'B} = 135^o$, suy ra $\widehat{C'BE'} = 45^o$, từ đó tam giác BC'E' là tam giác vuông cân và C'E' = C'B.

• *Kết luận.* Quỹ tích các điểm E khi C chạy trên nửa đường tròn là cung chứa góc 135^o dựng trên đoạn thẳng AB (một cung).

37. (h.52)

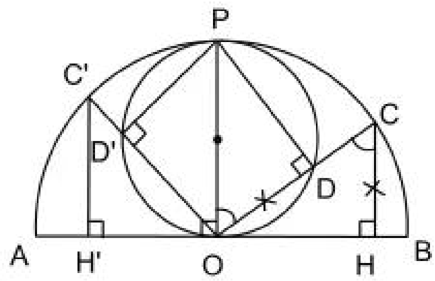
• *Phần thuận*

Vẽ OP vuông góc với AB (P thuộc nửa đường tròn). Nối P với D. Xét hai tam giác OPD và COH, chúng có :

OD = CH (theo giả thiết)

OP = OC (bán kính nửa đường tròn)

$\widehat{POD} = \widehat{OCH}$ (hai góc so le trong).



Hình 52

Vậy $\Delta OPD = \Delta COH$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ODP} = 90^o$.

Mà O, P cố định. Vậy điểm D nằm trên đường tròn đường kính OP.

• *Phần đảo*

Lấy điểm D' bất kì trên đường tròn đường kính OP, tia OD' cắt nửa đường tròn đường kính AB tại C'. Hạ đường vuông góc C'H' với AB. Ta phải chứng minh OD' = C'H'.

Xét hai tam giác vuông OD'P và C'H'O. Chúng có cạnh huyền bằng nhau (OP = OC' bằng bán kính nửa đường tròn đã cho) và một góc nhọn bằng nhau ($\widehat{POD'} = \widehat{OC'H'}$ vì ở vị trí so le trong), vậy $\Delta OD'P = \Delta C'H'O$, suy ra OD' = C'H'.

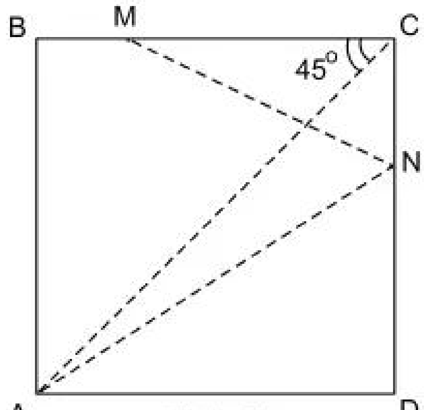
• *Kết luận*

Quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn đường kính AB là đường tròn đường kính OP, với $OP = \dfrac{AB}{2}$.

38. *Phân tích* (h.53). Giả sử đã dựng được hình vuông thoả mãn yêu cầu của đề bài. Ta có thể quy bài toán về việc dựng đỉnh C. Đỉnh C là giao điểm của :

– Cung chứa góc 90^o dựng trên đoạn thẳng MN (vì $\widehat{BCD} = 90^o$ mà BC chứa M, CD chứa N).

– Cung chứa góc 45^o dựng trên đoạn thẳng AM. (vì đường chéo AC cũng là đường phân giác nên $\widehat{ACB} = 45^o$ mà CB lại chứa M).



Hình 53

Cách dựng

– Dựng cung chứa góc 90^o trên đoạn thẳng MN.

– Dựng cung chứa góc 45^o trên đoạn thẳng AM.

Giao điểm của hai cung trên chính là đỉnh C của hình vuông.

Nối C với M, nối C với N, kẻ AB vuông góc với MC, kẻ AD vuông góc với CN. Ta có tứ giác ABCD là hình vuông phải dựng.

Bài tập bổ sung

6.1. Có thể dựng cung chứa góc 60^o trên đoạn thẳng AB theo cách được học trong SGK hoặc theo cách tương tự bài tập 46 trong SGK.

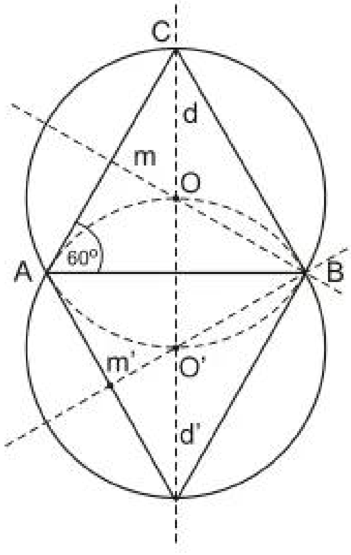
Vì bài này có góc đặc biệt là 60^o nên có thể làm theo cách sau :

– Dùng AB làm cạnh dựng một tam giác đều ABC (h.bs.19).

– Dựng đường trung trực của hai cạnh, chẳng hạn AB và AC. Khi đó xác định được điểm O sao cho OA = OB = OC.

– Lấy O làm tâm vẽ đường tròn bán kính R = OA, đường tròn này đi qua 3 điểm A, B, C.

Vì $\widehat{ACB} = 60^o$ nên cung (lớn) AB là cung chứa góc 60^o.



Hình bs.19

Lấy đối xứng qua đường thẳng AB, ta được cung chứa góc thứ hai thỏa mãn bài toán.

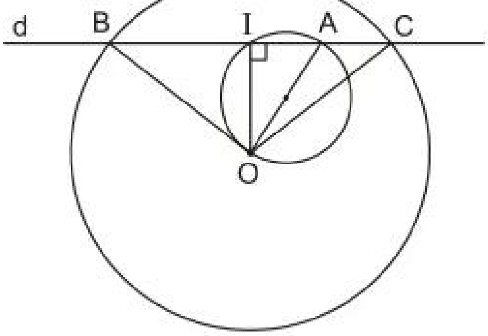
Chú ý : Cung nhỏ AB trong cách dựng trên là cung chứa góc 120^o.

6.2. Xem hình vẽ *(h.bs.20).*

Ta có : hai điểm O, A và đường tròn (O) cố định ; các độ dài R, OA không đổi ; đường thẳng d di động kéo theo hai điểm B, C di động, kéo theo điểm I di động ; I là điểm sinh quỹ tích.

Vì OBC là tam giác cân (OB = OC = R) nên OI vuông góc với BC.

Như vậy, điểm I di động, luôn nhìn hai điểm O, A cố định dưới góc vuông, do đó quỹ tích I là đường tròn đường kính AO.



Hình bs.20

6.3. Trước hết cần làm xuất hiện tổng MA + MB + MC, sau đó tìm điều kiện để tổng ấy là nhỏ nhất.

Lấy MC làm cạnh, dựng tam giác đều MCN (h.bs.21), khi đó MC = MN.

Lấy AC làm cạnh dựng tam giác đều ACP (h.bs.22), khi đó AC = PC.

Đồng thời $\widehat{MCA} + \widehat{ACN} = 60^o = \widehat{PCN} + \widehat{ACN}$, *suy ra* $\widehat{MCA} = \widehat{PCN}$.

Do đó, CMA và CNP là hai tam giác bằng nhau (c.g.c), suy ra :

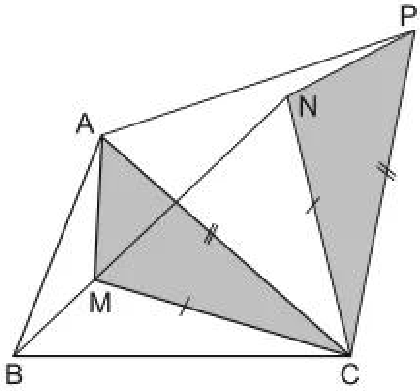
$$MA = NP \text{ và } \widehat{CMA} = \widehat{CNP}.$$

Từ đó : MA + MB + MC = NP + MB + MN.

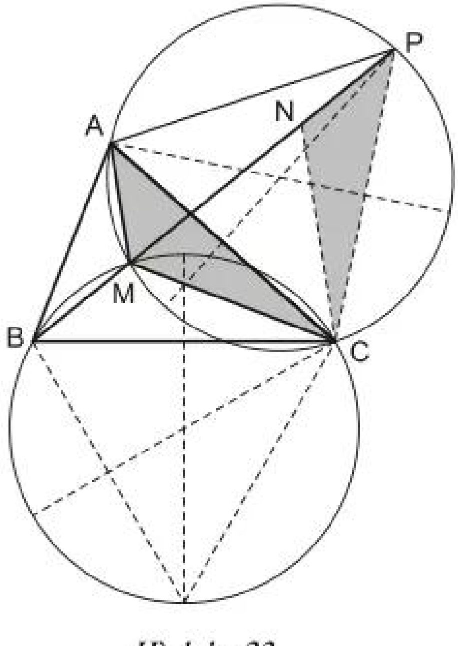
Do B, P cố định khi cho trước tam giác ABC nên BM + MN + NP ngắn nhất khi và chỉ khi 4 điểm B, M, N, P thẳng hàng.

Do $\widehat{CMN} = 60^o$ *nên 3 điểm B, M, N thẳng hàng khi và chỉ khi* $\widehat{BMC} = 120^o$.

Tương tự, do $\widehat{CNM} = 60^o$ *nên 3 điểm M,*



Hình bs.21



Hình bs.22

N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\widehat{\mathrm{CNP}}$ =
120°.

Vậy MA + MB + MC nhỏ nhất khi và chỉ khi $\widehat{\mathrm{BMC}} = 120^o$ *và* $\widehat{\mathrm{AMC}} = 120^o$.

Suy ra M là giao điểm của hai cung chứa góc 120^o, tương ứng dựng qua hai điểm B, C và C, A (*h.bs.22*).