§7. Phương trình quy về phương trình bậc hai

45. a) $(x + 2)^2 - 3x - 5 = (1 - x)(1 + x) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0$. Nghiệm :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}.$$

b) $(x - 1)^3 + 2x = x^3 - x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 2 = 0$. Nghiệm :

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}, \qquad x_2 = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}.$$

c) $x(x^2 - 6) - (x - 2)^2 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow 4x^2 + 5x + 5 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

d) $(x + 5)^2 + (x - 2)^2 + (x + 7)(x - 7) = 12x - 23 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$. Nghiệm kép : $x_1 = x_2 = 1$.

46. a) Điều kiện : $x \neq \pm 1$. Nghiệm $x_1 = -3$, $x_2 = 7$.

b) Điều kiện : $x \neq 3$, $x \neq 1$. Đưa phương trình đã cho về phương trình

$3x^2 + 2x - 65 = 0$. Nghiệm : $x_1 = -5$, $x_2 = \dfrac{13}{3}$.

c) Điều kiện : $x \neq -2$, $x \neq 3$. Đưa phương trình đã cho về phương trình

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Suy ra : $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Vì $x_2 = 3$ không thoả mãn điều kiện của ẩn nên phương trình chỉ có một nghiệm là $x = 1$.

d) Điều kiện : $x \neq -4$, $x \neq 2$. Đưa phương trình đã cho về phương trình :

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Suy ra $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Hai giá trị này đều không thoả mãn điều kiện của ẩn. Phương trình vô nghiệm.

e) Điều kiện : $x \neq 1$. Đưa phương trình đã cho về phương trình :

$$9x^2 - 11x - 14 = 0.$$

Nghiệm : $x_1 = -\dfrac{7}{9}$, $x_2 = 2$.

f) Điều kiện : $x \neq -1$, $x \neq 1$. Đưa phương trình đã cho về phương trình :

$$x^2 - 8x + 16 = 0.$$

Nghiệm kép : $x_1 = x_2 = 4$.

47. a) *Đáp số :* $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{21}}{3}$, $x_3 = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{3}$.

b) $(x + 1)^3 - x + 1 = (x - 1)(x - 2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x + 1 = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 5) = 0. \text{ Nghiệm : } x = 0.$$

c) $(x^2 + x + 1)^2 = (4x - 1)^2 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - (4x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1 + 4x - 1)(x^2 + x + 1 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{rl} x^2 + 5x = 0 & (1) \\ \text{hoặc } x^2 - 3x + 2 = 0. & (2) \end{array}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm : $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

Phương trình (2) có hai nghiệm : $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

d) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 6(x^2 + 3x + 2) \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)^2 - 6(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 4) = 0.$$

Phương trình có bốn nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -4$.

e) $(2x^2 + 3)^2 - 10x^3 - 15x = 0 \quad \Leftrightarrow (2x^2 + 3)^2 - 5x(2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 3)(2x^2 - 5x + 3) = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$.

f) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 5) - (x - 5) = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x^2 - 1) = 0.$

Phương trình có ba nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

48. a) *Đáp số :* Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

b) *Đáp số :* Phương trình có bốn nghiệm : $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -0{,}4$, $y_4 = 0{,}4$.

c) Đặt $z^2 = t$, $t \geq 0$, ta có $t^2 - 7t - 144 = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{7 - 25}{2}$ (loại),

$t_2 = \dfrac{7 + 25}{2} = 16$.

Phương trình có hai nghiệm : $z_1 = -4$, $z_2 = 4$.

d) Phương trình có bốn nghiệm : $t_1 = -\dfrac{1}{2}, t_2 = \dfrac{1}{2}, t_3 = -\dfrac{1}{3}, t_4 = \dfrac{1}{3}$.

e) $\dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6} = 0$ Û $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Phương trình có bốn nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

f) Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = -\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$.

49. Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$, ta có phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) trở thành : $at^2 + bt + c = 0$(**). Khi a, c trái dấu thì phương trình (**) có hai nghiệm t_1, t_2. Theo hệ thức Vi-ét, $t_1.t_2 = \frac{c}{a} < 0$.

Do đó $t_1 < 0 < t_2$. Vì $t \geq 0$ nên $x^2 = t_2$. Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt :

$$x = \pm\sqrt{t_2}\,.$$

50. a) Đặt $t = 4x - 5$, phương trình đã cho trở thành : $t^2 - 6t + 8 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = 2$, $t_2 = 4$.

– Với $t_1 = 2$, ta có $4x - 5 = 2$. Suy ra $x_1 = \frac{7}{4}$.

– Với $t_1 = 4$, ta có $4x - 5 = 4$. Suy ra $x_2 = \frac{9}{4}$.

b) *Hướng dẫn*. Đặt $t = x^2 + 3x - 1$, ta được phương trình $t^2 + 2t - 8 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm :

$t_1 = -4$, $t_2 = 2$. Phương trình đã cho có hai nghiệm : $x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

c) *Hướng dẫn*. Đặt $2x^2 + x - 2 = t$, ta được phương trình $t^2 + 5t - 6 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

d) *Hướng dẫn*. Đặt $x^2 - 3x + 2 = t$, ta được phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm : $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

e) Điều kiện $x \neq -1$. Đặt $\frac{x}{x+1} = t$, ta được phương trình $2t^2 - 5t + 3 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$.

– Với $t_1 = 1$, ta có $\frac{x}{x+1} = 1$. Suy ra $x = x + 1$. Phương trình này vô nghiệm.

– Với $t_1 = \frac{3}{2}$, ta có $\frac{x}{x+1} = \frac{3}{2}$. Suy ra $2x = 3x + 3$. Phương trình này có nghiệm $x = -3$.

$x = -3$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -3$.

f) Điều kiện $x \geq 1$. Đặt $\sqrt{x - 1} = t$, $t \geq 0$, ta có $x = t^2 + 1$ và phương trình đã cho trở thành $t^2 - t - 2 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Giá trị $t_1 = -1$ không thoả mãn điều kiện của t.

Với $t_2 = 2$, ta có $\sqrt{x - 1} = 2$ hay $x - 1 = 4$. Suy ra $x = 5$. Giá trị $x = 5$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 5$.

Bài tập bổ sung

7.1. a) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow [x(x-1)]^2 + 2x(x-1) - 3 = 0.$

Đặt $x(x - 1) = t$, ta có $x^2 - x - t = 0$ (1)

và phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \qquad (2)$$

Phương trình (2) có hai nghiệm : $t = 1$ và $t = -3$.

Khi $t = 1$, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Khi $t = -3$, phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện $x \leq \frac{3}{2}$.

Đặt $\sqrt{3 - 2x} = t$ (1), $t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 5 = 0$.

Suy ra $t = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$.

Thay giá trị này của t vào phương trình (1) ta được : $3 - 2x = \dfrac{11 - \sqrt{21}}{2}$.

Vậy $x = \dfrac{\sqrt{21} - 5}{4}$.

7.2. a) Khi m = 2, phương trình đã cho trở thành $x + 2\sqrt{x - 1} - 3 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x - 1}$, $t \geq 0$, ta có $t^2 + 2t - 2 = 0$.

Suy ra $t = -1 - \sqrt{3}$ (loại) hoặc $t = -1 + \sqrt{3}$.

Với $t = -1 + \sqrt{3}$ thì $x = (-1 + \sqrt{3})^2 + 1 = 5 - 2\sqrt{3}$.

b) Đặt $t = \sqrt{x - 1}$, $t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 2t - m^2 + 6m - 10 = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) có $a = 1 > 0$, $c = -m^2 + 6m - 10 = -[(m - 3)^2 + 1] < 0$ nên nó có hai nghiệm trái dấu t_1 và t_2. Giả sử $t_2 > 0$. Khi đó $x = t_2^2 + 1$. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

7.3. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1) = 0 & (1) \\ x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1) = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có $\Delta'_1 = m^2 + 4(m^2 + 1) > 0$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (2) có $\Delta'_2 = 4 + 2m(m^2 + 1) = 2m^3 + 2m + 4$.

$\Delta'_2 \geq 0 \Leftrightarrow m^3 + m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m^2 - m + 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Như vậy, phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi xảy ra một trong 2 trường hợp sau :

Trường hợp 1 : (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (1). Khi đó

$$\begin{cases} x = 2 \\ \Delta'_2 = 0 \\ 4 - 4m - 4(m^2 + 1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m(m + 1) \neq 0 \end{cases} \text{ loại.}$$

Trường hợp 2 : (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2, trong đó x_1 cũng là nghiệm của (1) còn x_2 không phải nghiệm của (1). Khi đó ta có

$$\begin{cases} \Delta'_2 > 0 \\ x_1^2 - 2mx_1 - 4(m^2+1) = 0 \\ x_1^2 - 4x_1 - 2m(m^2+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ (4-2m)x_1 + 2(m^2+1)(m-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ x_1 = m^2 + 1. \end{cases}$$

Thay $x_1 = m^2 + 1$ vào (1), ta được :

$$(m^2+1)^2 - 2m(m^2+1) - 4(m^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 1 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \text{ (loại vì } m > -1) \\ m = 3. \end{array}\right.$$

Thử lại khi m = 3, các phương trình (1) và (2) trở thành :

$$x^2 - 6x - 40 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 - 4x - 60 = 0$$

Chúng có các nghiệm lần lượt là –4 ; 10 và –6 ; 10.

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt khi m = 3 (ba nghiệm đó là –4, –6 và 10).