§8. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

44. (h.60) Cách vẽ như sau :

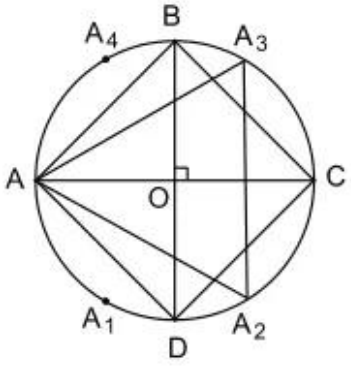
Vẽ đường tròn tâm O, bán kính R.

Vẽ hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau.

Nối A với B, B với C, C với D, D với A, ta được tứ giác ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R).

Từ điểm A ta đặt liên tiếp các cung $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2C}$, $\overset{\frown}{CA_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_4}$ mà dây căng các cung đó có độ dài bằng R.

Nối A với A_2, A_2 với A_3, A_3 với A, ta được tam giác đều AA_2A_3 nhận O làm tâm.



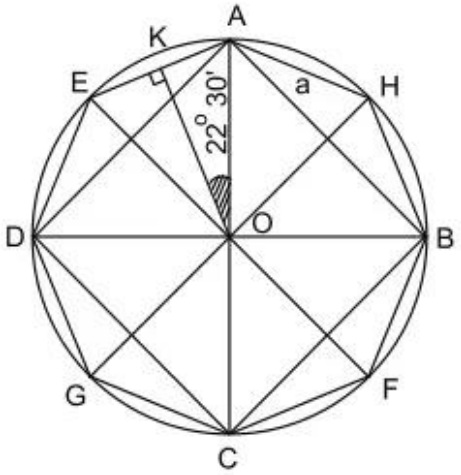
Hình 60

45. (h.61) Cách vẽ như sau :

Vẽ đường tròn tâm O, bán kính R = 2cm.

Vẽ hình vuông ABCD nội tiếp (O ; 2cm) như bài 44.

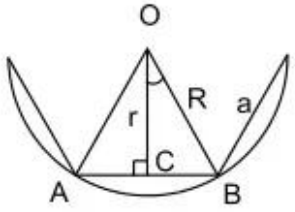
Vẽ hai đường kính EF, GH lần lượt vuông góc với AD và AB.



Nối A với E, E với D,... ta được đa giác AEDGCFBH là hình tám cạnh đều nội tiếp đường tròn (O ; 2cm).

Hình 61

46. (h.62) Giả sử một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.



Hình 62

Xét tam giác vuông OCB, ta có :

$$\widehat{COB} = \frac{180^o}{n}$$

$$\sin\widehat{COB} = \frac{CB}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow \sin\frac{180^o}{n} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^o}{n}} \\ a = 2R.\sin\dfrac{180^o}{n} \end{cases}$$

$$tg\widehat{COB} = \frac{CB}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow tg\frac{180^o}{n} = \frac{a}{2r} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{a}{2tg\dfrac{180^o}{n}} \\ a = 2r.tg\dfrac{180^o}{n} \end{cases}$$

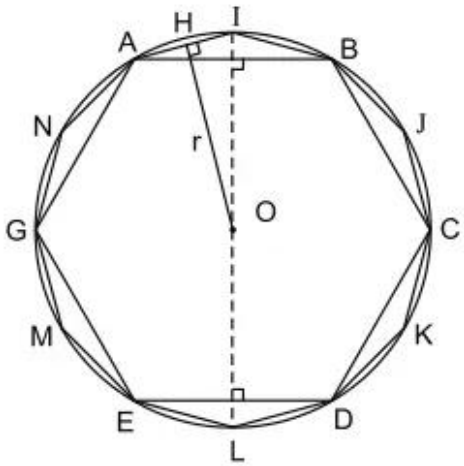
47. (h.63) a) Trình tự vẽ như sau :

• Vẽ đường tròn tâm O bán kính 2cm.

Từ một điểm A bất kì trên đường tròn (O ; 2cm) ta đặt liên tiếp các cung AB, BC,... mà dây căng cung dài 2cm. Nối A với B, B với C,... ta được lục giác đều ABCDEG nội tiếp đường tròn.

Còn có nhiều cách vẽ khác.

• Vẽ đường kính vuông góc với AB, DE, ta được I, L lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, DE.



Hình 63

Tương tự, ta lần lượt vẽ các trung điểm J, M, K, N của các cung BC, EG, CD, GA. Nối lại, ta có hình 12 cạnh đều AIBJCKDLEMGN.

b) AI là cạnh a của hình 12 cạnh đều nội tiếp đường tròn có bán kính R = 2cm. Áp dụng công thức $a = 2R.\sin\frac{180^o}{n}$, ta có

$$AI = 2 \times 2 \times \sin 15^o$$
$$\approx 4 \times 0,259$$
$$\approx 1,04 \text{ (cm)}.$$

c) OH là bán kính r của đường tròn nội tiếp hình 12 cạnh đều. Áp dụng công thức

$$r = \frac{a}{2.\text{tg}\frac{180^o}{n}}, \text{ ta có}$$

$$r \approx \frac{1,04}{2 \times \text{tg}\,15^o} \approx \frac{1,04}{2 \times 0,267} \approx 1,947 \text{ (cm)}.$$

48. a) Áp dụng công thức $a = 2R.\sin\frac{180^o}{n}$, ta có

$$a = 2.3.\sin 36^o \approx 6 \times 0,587 \approx 3,522 \text{ (cm)}.$$

b) Áp dụng công thức $a = 2r\,.\,\text{tg}\frac{180^o}{n}$, ta có

$$a = 2.3.\text{tg}36^o \approx 6 \times 0,726 \approx 4,356 \text{ (cm)}.$$

49. a) *Cách 1.* Áp dụng công thức $a = 2R\sin\frac{180^o}{n}$, ta có

$$a = 2R.\sin 22^o30' \approx 2.R.0,382 \approx 0,764.R.$$

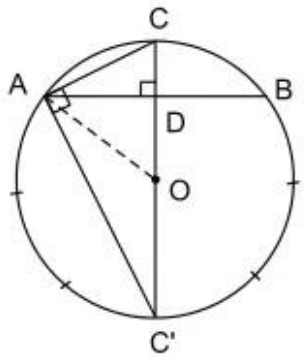
b) *Cách 2* (h.64) :

CA là cạnh của hình bát giác đều nội tiếp vì $\widehat{AOC} = 45^o$.

Trong tam giác vuông CAC', ta có

$AC^2 = CD.CC'$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Ta biết $OD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ (nửa cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R)).



Hình 64

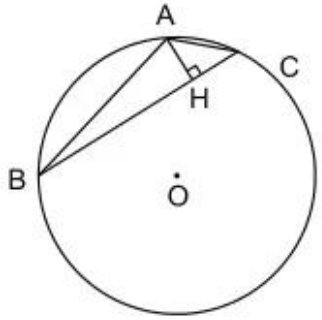
$$CD = OC - OD = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R(2-\sqrt{2})}{2};$$

$$CC' = 2R.$$

Do đó $AC^2 = R^2(2-\sqrt{2}) \Rightarrow AC = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}76R.$

50. (h.65) Dây AB bằng cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R) nên $AB = R\sqrt{2}$ và cung nhỏ AB có sđ $\overset{\frown}{AB} = 90^o$.

Dây BC bằng cạnh tam giác đều nội tiếp nên $BC = R\sqrt{3}$ và cung nhỏ BC có sđ $\overset{\frown}{BC} = 120^o$. Từ đó



Hình 65

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} = 120^o - 90^o = 30^o.$$

Vậy $\widehat{ABC} = 15^o.$

Từ đây ta có

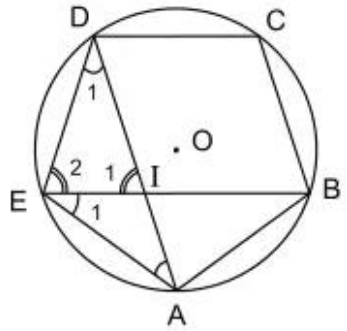
$$AH = AB.\sin\widehat{ABC} = \sqrt{2}R.\sin 15^o \approx 0{,}36R.$$

51. (h.66) Vẽ đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều ABCDE, ta có :

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{DE} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{EA} = \frac{360^o}{5} = 72^o. \quad (1)$$

$$\widehat{E}_1 = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}}{2} \quad (2)$$

$$\widehat{D}_1 = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{EA}}{2} \quad (3)$$



Hình 66

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{D}_1$. (4)

Từ đó $\Delta AIE \backsim \Delta AED$ (theo (4) và vì $\widehat{A}$ chung)

suy ra $\frac{AE}{AD} = \frac{AI}{AE}$. (5)

Lại có $\widehat{E}_2 = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}}{2}$ (6)

$$\widehat{I_1} = \frac{\text{sđ } \overset{\frown}{DE} + \text{sđ } \overset{\frown}{AB}}{2}. \qquad (7)$$

Từ (1), (6), (7) suy ra $\widehat{E_2} = \widehat{I_1}$, từ đó DI = DE = AE. (8)

Thay (8) vào (5) ta có $\frac{DI}{AD} = \frac{AI}{DI}$ hay $DI^2 = AI.AD$.

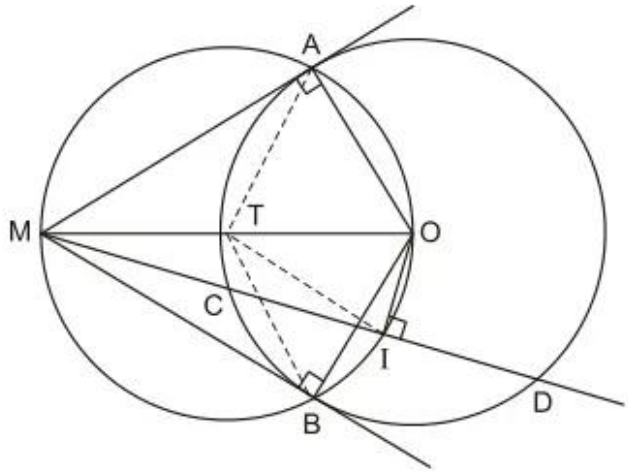
Bài tập bổ sung

8.1. Chỉ có các câu a), d), e), g) h) là đúng, các câu còn lại là sai.

8.2. Xem hình vẽ *(h.bs.25)*.

Các điểm A, I, B cùng nhìn đoạn MO dưới một góc vuông, do đó cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

Vậy, MAOIB là ngũ giác nội tiếp.



Hình bs.25