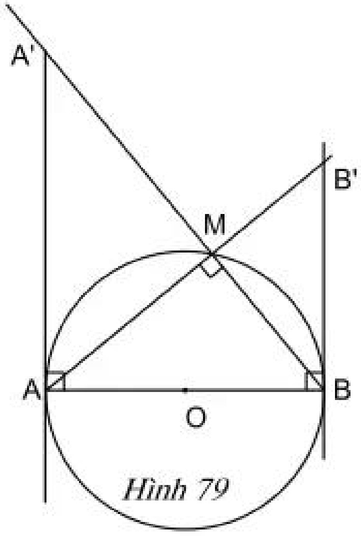
Bài tập ôn chương III



Hình 79

73. (h.79) a) Từ hai tam giác vuông đồng dạng $\Delta AA'B \backsim \Delta BAB'$, ta có

$$\frac{AA'}{BA} = \frac{AB}{BB'} \Rightarrow AA'.BB' = AB^2.$$

b) Từ hai tam giác vuông đồng dạng $\Delta A'MA \backsim \Delta A'AB$, ta có

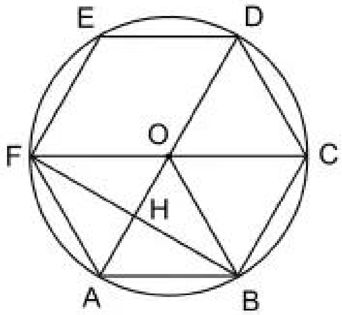
$$\frac{A'M}{A'A} = \frac{A'A}{A'B} \Rightarrow A'A^2 = A'M.A'B.$$

74. (h.80) Vẽ lục giác đều ABCDEF cùng với đường tròn ngoại tiếp. Dễ thấy rằng DA là đường kính và tứ giác OFAB là hình thoi. Gọi giao điểm của AD và BF là H. Ta có :

$$AH = \frac{R}{2},$$

$$HD = \frac{3R}{2}.$$

Từ đó $$\frac{AH}{HD} = \frac{1}{3}.$$



Hình 80

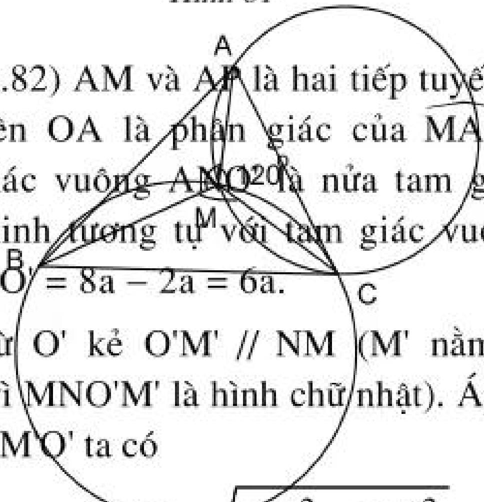
75. (h.81) Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA}$ thế thì điểm M nhìn các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC dưới cùng một góc là 120^o. Suy ra cách dựng sau :

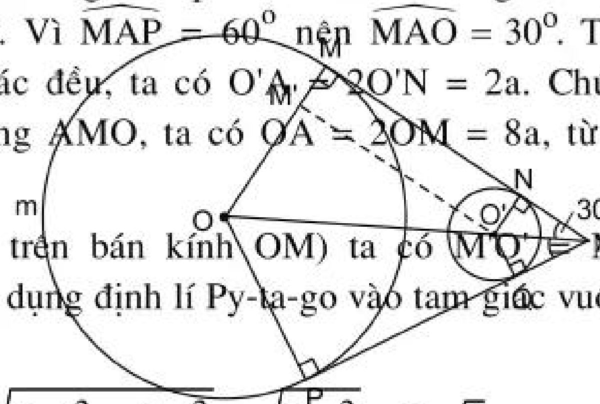
Dựng cung tròn chứa góc 120^o vẽ trên đoạn thẳng BC.

Dựng cung tròn chứa góc 120^o vẽ trên đoạn thẳng AC.

Giao điểm của hai cung tròn này là điểm M phải dựng.

Hình 81 *Hình 82*





76. (h.82) AM và AP là hai tiếp tuyến chung xuất phát từ A đến đường tròn (O) nên OA là phân giác của $\widehat{MAP}$. Vì $\widehat{MAP} = 60^o$ nên $\widehat{MAO} = 30^o$. Tam giác vuông ANO' là nửa tam giác đều, ta có O'A = 2O'N = 2a. Chứng minh tương tự với tam giác vuông AMO, ta có OA = 2OM = 8a, từ đó OO' = 8a − 2a = 6a.

Từ O' kẻ O'M' // NM (M' nằm trên bán kính OM) ta có M'O' = MN (vì MNO'M' là hình chữ nhật). Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông OM'O' ta có

$$M'O' = \sqrt{OO'^2 - OM'^2} = \sqrt{(6a)^2 - (3a)^2} = \sqrt{27a^2} = 3a\sqrt{3}.$$

Suy ra MN = $3a\sqrt{3}$.

Tứ giác ANO'Q có $\widehat{N} = \widehat{Q} = 90^o$, $\widehat{A} = 60^o$, suy ra $\widehat{NO'Q} = 120^o$.

Tương tự, ta có $\widehat{MOP} = 120^o$, suy ra cung lớn MmP có

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{MmP} = 360^o - 120^o = 240^o.$$

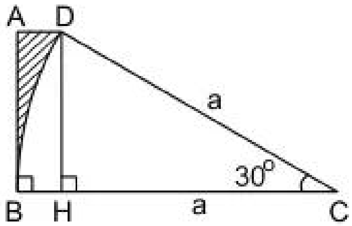
Độ dài cung nhỏ $\overset{\frown}{NQ}$ là $\quad l_1 = \dfrac{\pi.a.120}{180} = \dfrac{2\pi a}{3}.$

Độ dài cung lớn $\overset{\frown}{MmP}$ là $\quad l_2 = \dfrac{\pi.4a.240}{180} = \dfrac{16\pi a}{3}.$

Độ dài của dây cua-roa mắc qua hai ròng rọc là

$$2MN + l_1 + l_2 = 2.3a\sqrt{3} + \frac{2\pi a}{3} + \frac{16\pi a}{3} = 6a(\pi + \sqrt{3}) \approx 29{,}24a.$$

77. Diện tích phần gạch sọc trên hình 83 là hiệu giữa diện tích hình thang vuông ABCD và diện tích hình quạt tròn 30^o của đường tròn bán kính a.



Hình 83

Từ D kẻ DH vuông góc với BC thì tam giác vuông CHD là nửa tam giác đều, ta có DH = $\dfrac{a}{2}$

và CH = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra BH = BC − CH = $a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, từ đó AD = $a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tứ giác ABHD là hình chữ nhật).

Diện tích hình thang vuông ABCD bằng

$$\frac{AD + BC}{2}.AB = \frac{a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

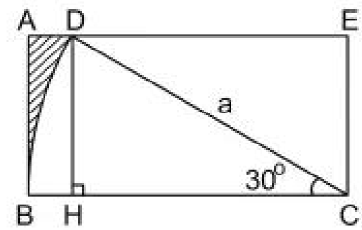
Diện tích quạt tròn bằng $\dfrac{\pi a^2.30}{360} = \dfrac{\pi a^2}{12}$.

Vậy diện tích phần gạch sọc là $\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi a^2}{12} = \dfrac{a^2}{24}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi)$

$$\approx 0{,}022a^2.$$

Có thể tính cách khác, như sau :

Diện tích phần gạch sọc trên hình 84 bằng diện tích hình chữ nhật ABCE trừ đi tổng diện tích hình quạt tròn CBD và tam giác vuông CED.



Hình 84

$$S_{ABCE} = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{quạt} = \frac{\pi a^2}{12}$$

$$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Diện tích phần gạch sọc bằng

$$\frac{a^2}{2} - \left(\frac{\pi a^2}{12} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{a^2}{24}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi) \approx 0{,}022a^2.$$

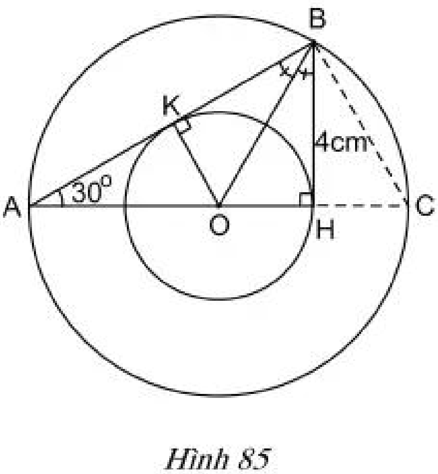
78. (h.85) a) Hạ OK vuông góc với AB. Tâm O nằm trên tia phân giác của góc B nên cách đều hai cạnh của góc, ta có OK = OH. Do đó đường tròn (O ; OH) tiếp xúc với cạnh AB.

b) Tia đối của tia HA cắt đường tròn lớn tại C. Nối B với C. Ta có tam giác AOB cân (vì $\widehat{A} = \widehat{ABO} = 30^o$) nên OA = OB. Vậy đường tròn (O ; OA) đi qua B.

$\widehat{ABC} = 90^o$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O ; OA).

Trong tam giác vuông ABC, ta có

$$AH.HC = BH^2,$$



Hình 85

hay $\qquad (OA + OH)(OA - OH) = 4^2$

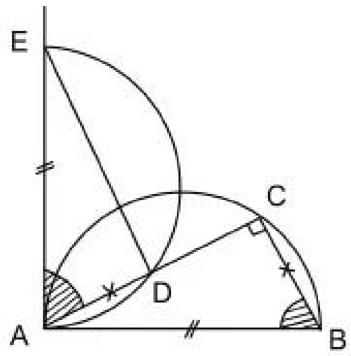
$$OA^2 - OH^2 = 16. \qquad (*)$$

Nhân hai vế của (*) với π ta có

$$\pi.(OA^2 - OH^2) = 16\pi.$$

Nhưng $\pi(OA^2 - OH^2)$ chính là diện tích hình vành khăn. Vậy diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn là 16π (cm^2).

79. a) (h.86)



• *Phần thuận*

Nối D với E.

$\Delta ADE = \Delta BCA$ vì chúng có :

$AE = AB$,

$AD = BC$,

$\widehat{EAD} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Suy ra $\widehat{D} = 90^o$ (vì $\widehat{D} = \widehat{C}$).

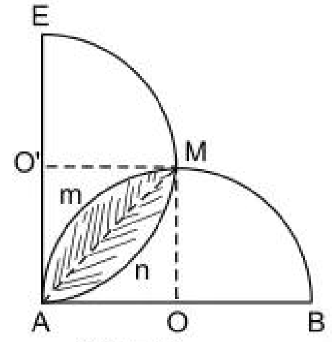
Khi C di chuyển trên nửa đường tròn đường kính AB, điểm D luôn nhìn đoạn thẳng AE dưới một góc bằng 90^o, nên D nằm trên nửa đường tròn đường kính AE.

• *Phần đảo*

Lấy điểm D' bất kì trên đường tròn đường kính AE. Đường thẳng AD' cắt đường tròn đường kính AB tại C'. Nối C' với B, nối D' với E. Hai tam giác AD'E và BC'A có $\widehat{D'} = \widehat{C'} = 90^o$, AE = AB, $\widehat{EAD'} = \widehat{ABC'}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) suy ra $\Delta AD'E = \Delta BC'A$, từ đó AD' = BC', đó là điều phải chứng minh.

• *Kết luận.* Vậy khi điểm C chạy trên nửa đường tròn đường kính AB thì quỹ tích điểm D là nửa đường tròn đường kính AE. (Khi C trùng với B thì D trùng với A, khi C trùng với A thì D trùng với E).

b) (h.87) Gọi tâm của hai nửa đường tròn đường kính AB và AE lần lượt là O và O'. Hai nửa đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai M. Dễ dàng chứng minh được O'AOM là hình vuông.



Hình 87

Hình 87

Diện tích phần chung của hai nửa đường tròn (O) và (O') là hai hình viên phân bằng nhau AmM và AnM.

Diện tích viên phân AmM = diện tích quạt AOM – diện tích tam giác AOM

$= \frac{1}{4}$ hình tròn đường kính AB – diện tích tam giác vuông cân AOM

$$= \frac{1}{4}.\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{2}\cdot\frac{AB}{2}$$

$$= \frac{\pi AB^2}{16} - \frac{AB^2}{8} = \frac{AB^2}{16}(\pi - 2).$$

Diện tích phần chung của hai nửa đường tròn là $\frac{AB^2}{8}(\pi - 2)$.

Bài tập bổ sung

III.1. Xem hình vẽ (h.bs.28).

a) Ta có $\widehat{AMC} = 30^o$ và $\widehat{ANC} = 30^o$ (vì cùng chắn cung AC),

suy ra $\widehat{TMC} = 60^o$ và $\widehat{TNC} = 60^o$.

Từ đó MNT là tam giác đều.

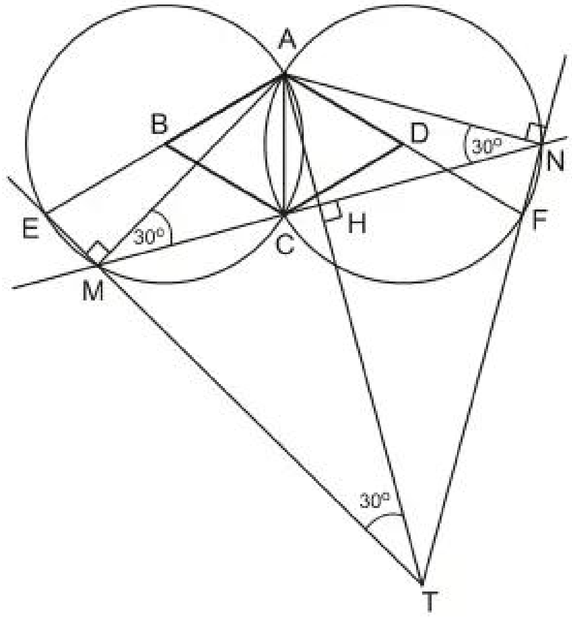
b) Theo trên MAN là tam giác cân nên AH vuông góc với MN, đồng thời HM = HN.

Khi đó TH cũng vuông góc với MN, suy ra $\widehat{HTM} = 30^o$.

Trong tam giác vuông AHM có $\widehat{AMH} = 30^o$ nên AM = 2 AH.

Trong tam giác vuông AMT có $\widehat{ATM} = 30^o$ nên AT = 2 MA.

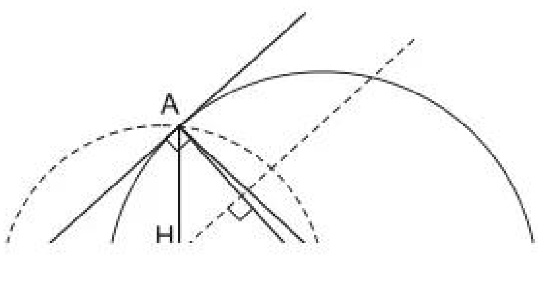
Suy ra AT = 4 AH.



Hình bs.28

III.2. Xem hình vẽ (h.bs.29).

Các điểm A, I, B cùng nhìn đoạn MO dưới một góc vuông, do đó cùng thuộc đường tròn đường kính MO.



Do đó $\widehat{AMI} = \widehat{ABI}$ *(cùng chắn cung nhỏ AI).*

Vì CH và MA cùng vuông góc với OA nên CH // MA, suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{HCI}$ *(đồng vị). Từ đó,* $\widehat{HCI} = \widehat{HBI}$ *nên CHIB là tứ giác nội tiếp.*

Suy ra $\widehat{HBC} = \widehat{HIC}$ *(cùng chắn cung nhỏ HC).*

Mặt khác, trong đường tròn (O) có $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ *(cùng chắn cung nhỏ AC).*

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{HIC}$.

Vậy HI song song với AD.

Hình bs.29

Bài số	*III.3*	*III.4*	*III.5*	*III.6*	*III.7*	*III.8*	*III.9*	*III.10*	*III.11*	*III.12*
Đáp án	*D*	*C*	*A*	*D*	*C*	*C*	*A*	*B*	*B*	*C*