

### 1. Vấn đề tổng hợp dao động

Có một máy nổ đặt trên bệ, pittông của máy chuyển động dao động so với khung máy, khung máy lại dao động so với bệ máy. Chuyển động của pittông so với bệ máy gọi là tổng hợp của hai dao động cơ nói trên.

Nếu hai dao động cơ được thực hiện theo cùng một phương thì li độ của chuyển động tổng hợp bằng tổng li độ của hai dao động hợp thành.

Như vậy, muốn tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương cần cộng hai hàm dạng sin. Sau đây ta xét quy tắc cộng trong trường hợp hai hàm có cùng tần số góc.

### 2. Tổng của hai hàm dạng sin cùng tần số góc. Phương pháp giản đồ Fre-nen

Cho hai hàm dạng sin :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (12.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (12.2)$$

Chúng ta sẽ tìm biểu thức của tổng của chúng

$$x = x_1 + x_2 \quad (12.3)$$

bằng phương pháp giản đồ Fre-nen (còn gọi là phương pháp giản đồ vectơ quay).

Vẽ vectơ quay  $\overrightarrow{OM}_1$  biểu diễn dao động điều hoà  $x_1$  và  $\overrightarrow{OM}_2$  biểu diễn  $x_2$  vào thời điểm  $t = 0$ .

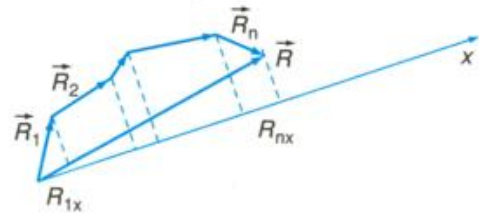
Theo quy ước ở mục 9, Bài 6 thì :

- $\overrightarrow{OM}_1$  có độ dài  $A_1$  và hợp với trục  $x$  góc  $(Ox, \overrightarrow{OM}_1) = \varphi_1$  vào lúc  $t = 0$ .

#### Định lí về hình chiếu

Cho  $\vec{R}$  là tổng của các vectơ  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_n$  :

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \dots + \vec{R}_n$$



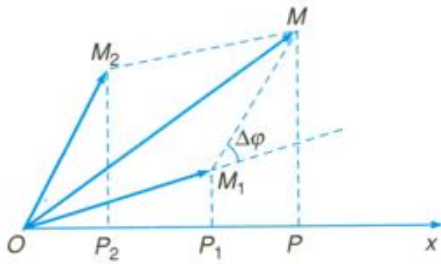
Hình 12.1 Quy tắc chiếu vectơ.

Theo quy tắc đa giác : vectơ  $\vec{R}$  là vectơ nối đầu và cuối của đường gãy khúc đa giác mà các cạnh lần lượt là  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_n$ .

Nếu chiếu tất cả lên trục  $x$  bất kì, ta sẽ có :

$$\text{ch}_x \vec{R} = \text{ch}_x \vec{R}_1 + \text{ch}_x \vec{R}_2 + \dots + \text{ch}_x \vec{R}_n$$

tức là hình chiếu của tổng  $\vec{R}$  thì bằng tổng các hình chiếu.



$$\text{ch}_x \overline{OM}_1 = \overline{OP}_1 = x_1$$

$$\text{ch}_x \overline{OM}_2 = \overline{OP}_2 = x_2$$

$$\text{ch}_x \overline{OM} = \overline{OP} = x = x_1 + x_2$$

Hình 12.2 Giải đồ Fre-nen.

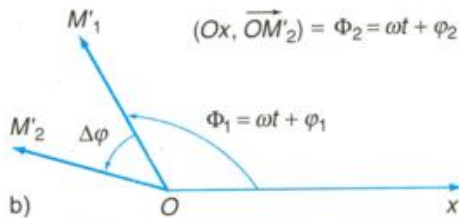
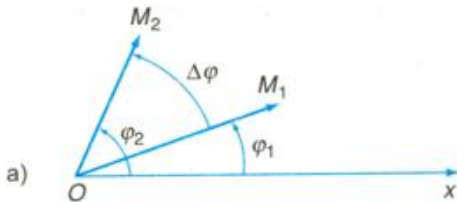
### Độ lệch pha

Vào thời điểm  $t$ , pha của hai dao động  $x_1$  và  $x_2$  lần lượt có giá trị  $\Phi_1 = \omega t + \varphi_1$  và  $\Phi_2 = \omega t + \varphi_2$ , hiệu số của chúng

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) \\ &= \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \end{aligned}$$

có giá trị không đổi và bằng hiệu số pha ban đầu.

Xem minh hoạ ở Hình 12.3.



Hình 12.3 Độ lệch pha của hai dao động.

a) Vị trí của hai vectơ quay vào thời điểm  $t = 0$ . Độ lệch pha ban đầu  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

•  $\overline{OM}_2$  có độ dài  $A_2$  và hợp với trục  $x$  góc  $(Ox, \overline{OM}_2) = \varphi_2$  vào lúc  $t = 0$ .

Vẽ hình bình hành mà hai cạnh là  $\overline{OM}_1$  và  $\overline{OM}_2$ , đường chéo  $\overline{OM}$  của hình bình hành là tổng của hai vectơ  $\overline{OM}_1$  và  $\overline{OM}_2$  (Hình 12.2).

$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 \quad (12.4)$$

Vectơ  $\overline{OM}$  có hình chiếu trên trục  $x$  là tổng của  $x_1$  và  $x_2$ .

$$x = x_1 + x_2$$

Vậy  $\overline{OM}$  chính là vectơ quay biểu diễn tổng của  $x_1$  và  $x_2$ .

Góc ở đỉnh  $O$  của hình bình hành vào thời điểm  $t = 0$  bằng hiệu số pha ban đầu  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  của hai dao động  $x_1$  và  $x_2$ .

Hai vectơ quay  $\overline{OM}_1$  và  $\overline{OM}_2$  quay đều quanh  $O$  với cùng tốc độ góc  $\omega$ , vì thế góc giữa hai vectơ này không đổi và hình bình hành có cạnh  $OM_1$  và  $OM_2$  cũng không biến dạng, hình này chỉ quay đều quanh  $O$  với tốc độ góc  $\omega$  như hai cạnh của nó.

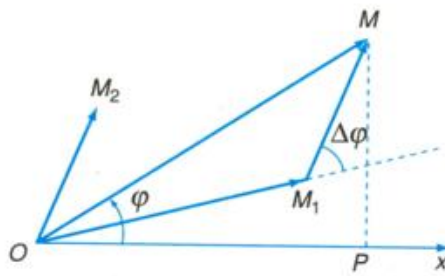
Vectơ  $\overline{OM}$  biểu diễn dao động tổng hợp  $x$  là đường chéo của hình bình hành, vectơ này cũng quay đều quanh  $O$  với tốc độ góc  $\omega$ .

### 3. Biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp

Độ dài của vectơ quay  $\overline{OM}$  (biên độ  $A$ ) và góc  $\varphi = (Ox, \overline{OM})$  mà  $\overline{OM}$  hợp với trục  $x$  vào thời điểm  $t = 0$  (pha ban đầu) có thể tính được theo công thức lượng giác trong tam giác  $OM_1M$  (Hình 12.4) :

$$\begin{aligned} (OM)^2 &= (OM_1)^2 + (M_1M)^2 - 2(OM_1)(M_1M)\cos\widehat{OM_1M} \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$





Hình 12.4 Giản đồ Fre-nen để tìm  $A$  và  $\varphi$ .

Độ dài của vectơ quay  $\overline{OM}$  chính là biên độ  $A$  của dao động tổng hợp  $x$ , còn góc  $\varphi = (Ox, \overline{OM})$  chính là pha ban đầu :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (12.5)$$

$$\tan \varphi = \frac{PM}{OP} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (12.6)$$

Vậy biểu thức của dao động tổng hợp là :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (12.7)$$

trong đó biên độ  $A$  và pha ban đầu  $\varphi$  cho bởi (12.5) và (12.6).

Biên độ  $A$  phụ thuộc vào các biên độ  $A_1$  và  $A_2$  và vào độ lệch pha của các dao động  $x_1$  và  $x_2$ .

Với  $A_1$  và  $A_2$  đã cho thì biên độ  $A$  có giá trị lớn nhất khi độ lệch pha  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  ( $x_1$  và  $x_2$  cùng pha) hoặc bằng một số nguyên lần  $2\pi$  :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2$$

hay là  $A = A_1 + A_2$ .

Biên độ  $A$  có giá trị nhỏ nhất khi độ lệch pha  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$  ( $x_1$  và  $x_2$  ngược pha) hoặc bằng  $\pi$  cộng một số nguyên lần  $2\pi$  :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2$$

hay là  $A = |A_1 - A_2|$ .

b) Vị trí của hai vectơ quay vào thời điểm  $t$ . Độ lệch pha :

$$\begin{aligned} \Phi_2 - \Phi_1 &= \omega t + \varphi_2 - (\omega t + \varphi_1) \\ &= \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi \\ &= \text{độ lệch pha ban đầu.} \end{aligned}$$

Hiệu số pha còn gọi là độ lệch pha của hai dao động. Dao động nào có pha ban đầu lớn hơn thì gọi là *sớm pha* so với dao động kia. Dao động có pha ban đầu nhỏ hơn gọi là *trễ pha* so với dao động kia. Trong ví dụ mà ta đang xét thì dao động  $x_2$  sớm pha hơn  $x_1$  một góc  $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , cũng có thể nói dao động  $x_1$  *trễ pha* so với  $x_2$  một góc  $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Nếu  $\Delta \varphi = 0$  thì hai dao động *cùng pha*.

Nếu  $\Delta \varphi = \pi$  thì hai dao động *ngược pha*.

**Ví dụ**

Hai dao động cơ điều hoà có cùng phương và cùng tần số  $f = 50$  Hz có biên độ lần lượt là  $A_1 = 2a$ ,  $A_2 = a$  và có pha ban đầu lần lượt là  $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$  và  $\varphi_2 = \pi$ .

Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp.

**Bài giải**

Tần số góc  $\omega = 2\pi f = 100\pi$  rad/s.

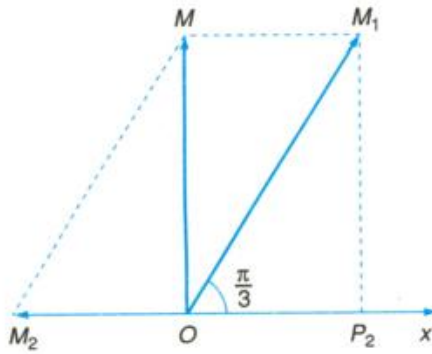
Biểu thức của hai dao động :

$$x_1 = 2a \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \leftrightarrow \overline{OM}_1$$

$$x_2 = a \cos(100\pi t + \pi) \leftrightarrow \overline{OM}_2$$

Vào thời điểm ban đầu ( $t = 0$ ) hai vectơ quay biểu diễn  $x_1$  và  $x_2$  ở vị trí như ở Hình 12.5.

**C1** Hai dao động  $x_1$  và  $x_2$  ở trên, dao động nào sớm pha hơn? Sớm pha bao nhiêu?



**Hình 12.5** Giải đồ Fre-nen cho bài giải.

Chú ý rằng :  $\text{ch}_x \overrightarrow{OM}_1 = 2a \cos \frac{\pi}{3} = a$

Như vậy vectơ tổng  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$  biểu diễn dao động tổng hợp  $x = x_1 + x_2$  vuông góc với trục  $x$  (vào thời điểm  $t = 0$ ) và có độ dài là :

$$A = \sqrt{OM_1^2 - OM_2^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

Biên độ của dao động tổng hợp là  $a\sqrt{3}$ , pha ban đầu là  $\frac{\pi}{2}$ .

Từ đó :

$$x = a\sqrt{3} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

**C2** Dùng công thức (12.5) và (12.6) để giải bài toán trên.

## ? CÂU HỎI

Nêu rõ vai trò của độ lệch pha khi tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương và cùng tần số góc.

## BÀI TẬP

- Xét dao động tổng hợp của hai dao động hợp thành có cùng phương và cùng tần số. Biên độ của dao động tổng hợp **không** phụ thuộc
  - biên độ của dao động hợp thành thứ nhất.
  - biên độ của dao động hợp thành thứ hai.
  - tần số chung của hai dao động hợp thành.
  - độ lệch pha của hai dao động hợp thành.
- Hai dao động cơ điều hoà cùng phương, cùng tần số góc  $\omega = 50 \text{ rad/s}$ , có biên độ lần lượt là 100 mm và 173 mm, dao động thứ hai trễ pha  $\frac{\pi}{2}$  so với dao động thứ nhất. Xác định dao động tổng hợp.  
*Hướng dẫn* : Có thể chọn gốc thời gian sao cho pha ban đầu của dao động thứ nhất bằng 0.
- Dùng công thức lượng giác (tổng của hai cosin) tìm tổng hợp của hai dao động điều hoà cùng phương, cùng tần số góc  $\omega$ , cùng biên độ  $A$  và có độ lệch pha  $\Delta\varphi$ . Đối chiếu với kết quả nhận được bằng cách dùng phương pháp giải đồ Fre-nen.