HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§ . HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

3.1. $\vec{m} = (-4 ; -2 ; 3)$, $\vec{n} = (-9 ; 2 ; 1)$.

3.2. a) Ta biết rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là một số thực. Theo giả thiết ta có $\vec{b} = (x_0 ; y_0 ; z_0)$ với $x_0 = 2$. Ta suy ra $k = \frac{1}{2}$ nghĩa là $1 = \frac{1}{2}x_0$.

Do đó : $-3 = \frac{1}{2}y_0$ nên $y_0 = -6$,

$4 = \frac{1}{2}z_0$ nên $z_0 = 8$.

Vậy ta có $\vec{b} = (2 ; -6 ; 8)$.

b) Theo giả thiết ta có $\vec{c} = -2\vec{a}$.

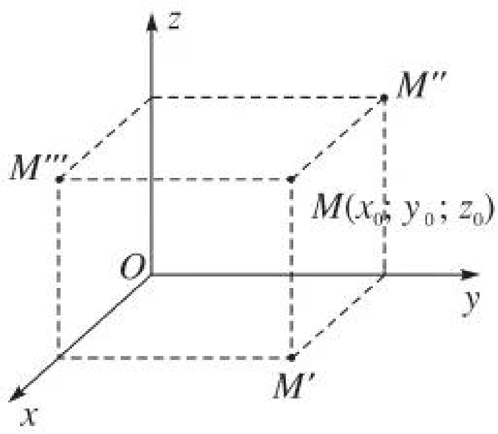
Do đó toạ độ của $\vec{c}$ là : $\vec{c} = (-2 ; 6 ; -8)$.

3.3. (h.3.19) Gọi M', M'', M''' lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx).

Ta có : $M'(x_0 ; y_0 ; 0)$

$M''(0 ; y_0 ; z_0)$

$M'''(x_0 ; 0 ; z_0)$.



Hình 3.19

3.4. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1 ; -2 ; 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1 ; -3 ; 0)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ với k là một số thực.

Giả sử ta có $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, khi đó : $\begin{cases} k.(-1) = -1 \\ k.(-3) = -2 \\ k.(0) = 1. \end{cases}$

Ta không tìm được số k nào thoả mãn đồng thời cả ba đẳng thức trên. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{MN} = (-5 ; 2 ; 0)$ và $\overrightarrow{MP} = (-10 ; 4 ; 0)$. Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$ với $k = \dfrac{1}{2}$ nên ba điểm M, N, P thẳng hàng.

3.5. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) có toạ độ là $(x ; 0 ; z)$, cần phải tìm x và z. Ta có :

$$MA^2 = (1-x)^2 + 1 + (1-z)^2$$
$$MB^2 = (-1-x)^2 + 1 + z^2$$
$$MC^2 = (3-x)^2 + 1 + (-1-z)^2.$$

Theo giả thiết M cách đều ba điểm A, B, C nên ta có $MA^2 = MB^2 = MC^2$.

Từ đó ta tính được $M = \left(\dfrac{5}{6} ; 0 ; -\dfrac{7}{6}\right)$.

3.6. a) Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Do đó : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ vì $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$.

b) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ nên : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$.

Do đó : $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DB}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$.

3.7. (h.3.20) a) Ta có $MPNQ$ là hình bình hành vì

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{CD}}{2}$

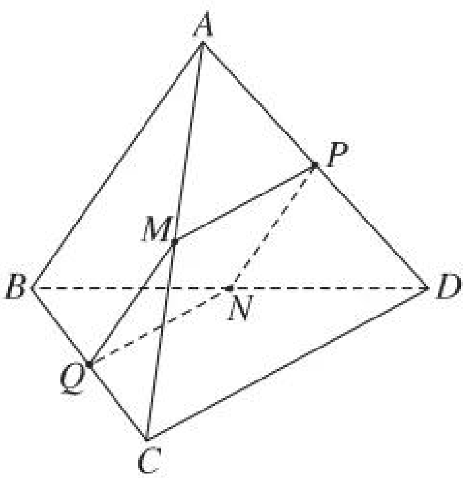
hay $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. (1)

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$

nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (2)

vì $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$.



Hình 3.20

Từ (1) và (2) ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$ là đẳng thức cần chứng minh.

b) Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{CD}}{2}$.

Do đó $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$. (3)

Mặt khác : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$

nên $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$ (4)

vì $\overrightarrow{CB}-(-\overrightarrow{BC})=\vec{0}$.

Từ (3) và (4) ta suy ra $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$ là đẳng thức cần chứng minh.

3.8. Muốn chứng tỏ rằng ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng ta cần tìm hai số thực p và q sao cho $\vec{w}=p\vec{u}+q\vec{v}$.

Giả sử có $\vec{w}=p\vec{u}+q\vec{v}$

$2\vec{c}-3\vec{a}=p(\vec{a}-2\vec{b})+q(3\vec{b}-\vec{c}) \Leftrightarrow (3+p)\vec{a}+(3q-2p)\vec{b}-(q+2)\vec{c}=\vec{0}$ (1)

Vì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lấy tuỳ ý nên đẳng thức (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}3+p=0\\3q-2p=0\\q+2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=-3\\q=-2.\end{cases}$$

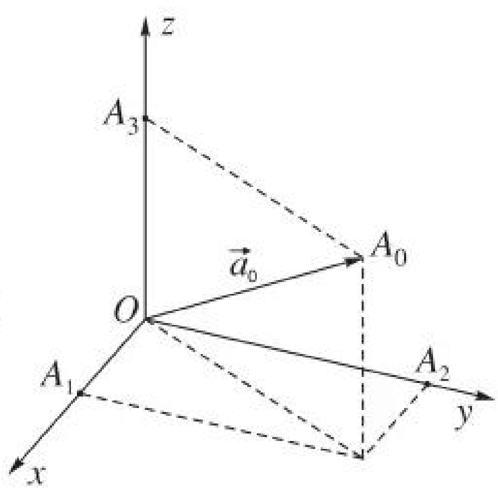
Như vậy ta có : $\vec{w}=-3\vec{u}-2\vec{v}$ nên ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

3.9. (h.3.21) Gọi $\vec{a}_0$ là vectơ đơn vị cùng hướng với vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}_0=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Gọi $\overrightarrow{OA_0}=\vec{a}_0$ và các điểm A_1, A_2, A_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm A_0 trên các trục Ox, Oy, Oz.

Khi đó ta có : $\dfrac{|\overrightarrow{OA_1}|}{|\overrightarrow{OA_0}|}=\cos\alpha$, $\dfrac{|\overrightarrow{OA_2}|}{|\overrightarrow{OA_0}|}=\cos\beta$,

$\dfrac{|\overrightarrow{OA_3}|}{|\overrightarrow{OA_0}|}=\cos\gamma$.



Hình 3.21

Vì $|\overrightarrow{OA_0}| = 1$ nên $|\overrightarrow{OA_1}| = \cos\alpha$, $|\overrightarrow{OA_2}| = \cos\beta$, $|\overrightarrow{OA_3}| = \cos\gamma$.

Ta có $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$, ta suy ra : $\overrightarrow{OA_0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$

hay $\overrightarrow{OA_0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Vì $\overrightarrow{OA_0} = \vec{a}_0$ mà $|\vec{a}_0| = 1$ nên ta có : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

3.10. a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (1)

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ (2)

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ (3)

Lấy (1) + (2) + (3) ta có hệ thức cần chứng minh là :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

b) Từ hệ thức trên ta suy ra định lí : "Nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp DB$, nghĩa là $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ thì $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ và do đó $AD \perp BC$."

3.11. a) $\vec{a}.\vec{b} = 6(1 - c)$; b) $\vec{a}.\vec{b} = -21$; c) $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

3.12. a) $|\overrightarrow{AB}| = 3$; b) $|\overrightarrow{AB}| = 5$.

3.13. Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-a ; b ; 0)$

và $\overrightarrow{AC} = (-a ; 0 ; c)$.

Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0$ nên góc $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.

Lập luận tương tự ta chứng minh được các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cũng là góc nhọn.

3.14. a) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 4$;

b) $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 36$;

c) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 18$.

3.15. a) Tâm $I(3 ; -1 ; 8)$, bán kính $r = 10$;

b) Tâm $I(-2 ; 1 ; 3)$, bán kính $r = 8$.

3.16. Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì $A \in (S)$ nên ta có : $1 - 2a + d = 0$ (1)

$B \in (S)$ nên ta có : $4 + 4b + d = 0$ (2)

$C \in (S)$ nên ta có : $16 - 8c + d = 0$ (3)

$O \in (S)$ nên ta có : $d = 0$ (4)

Giải hệ 4 phương trình trên ta có : $d = 0$, $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 2$.

Vậy mặt cầu (S) cần tìm có phương trình là : $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$.

Phương trình mặt cầu (S) có thể viết dưới dạng :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - \frac{1}{4} - 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{21}{4}.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{1}{2} ; -1 ; 2\right)$ và có bán kính $r = \frac{\sqrt{21}}{2}$.