CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc trong không gian gồm ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các *vectơ đơn vị* trên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. Điểm O được gọi là *gốc toạ độ*. Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là *các mặt phẳng toạ độ*.

Không gian gắn với hệ toạ độ $Oxyz$ được gọi là *không gian Oxyz*.

II- TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

Trong không gian $Oxyz$ cho một điểm M tuỳ ý.

Khi đó ta có $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ và gọi bộ ba số $(x ; y ; z)$ là *toạ độ của điểm M* đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$ đã cho. Ngược lại, với bộ ba số $(x ; y ; z)$ ta có một điểm M duy nhất trong không gian thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ta viết : $M = (x ; y ; z)$ hoặc $M(x ; y ; z)$.

III- TOẠ ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$ với $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Khi đó bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ được gọi là *toạ độ của vectơ* $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ cho trước. Ta viết : $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hay $\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$.

IV- BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và một số k. Khi đó ta có :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

☞ ***Chú ý.*** a) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.

b) $\vec{0} = (0 ; 0 ; 0)$.

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\neq \vec{0})$ cùng phương $\Leftrightarrow$ có một số k sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \\ b_3 = ka_3. \end{cases}$$

d) Nếu $A = (a_1; a_2; a_3)$, $B = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$.

V- BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ CÁC ỨNG DỤNG

a) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

b) Độ dài của một vectơ :

Cho vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, ta có $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

c) Khoảng cách giữa hai điểm $A = (x_A; y_A; z_A)$ và $B = (x_B; y_B; z_B)$ là

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

d) Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$.

Ta có : $\cos\varphi = \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

e) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

VI- PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I = (a ; b ; c)$ bán kính r có phương trình là : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$,

hoặc $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2$.

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(-A ; -B ; -C)$ có bán kính $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Tìm toạ độ của một vectơ và các yếu tố liên quan đến vectơ thoả mãn một số điều kiện cho trước

1. Phương pháp giải

Sử dụng các định nghĩa và khái niệm có liên quan đến vectơ : toạ độ của vectơ, độ dài của vectơ, ... để phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng, tính tổng (hiệu) của hai vectơ, tính các toạ độ trọng tâm của một tam giác, ...

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (5 ; 7 ; 2)$, $\vec{b} = (3 ; 0 ; 4)$, $\vec{c} = (-6 ; 1 ; -1)$. Hãy tìm toạ độ của các vectơ sau đây :

a) $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$;

b) $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$.

Giải

a) Ta có $\begin{cases} 3\vec{a} = (15 ; 21 ; 6) \\ -2\vec{b} = (-6 ; 0 ; -8) \\ \vec{c} = (-6 ; 1 ; -1). \end{cases}$

Do đó $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (3 ; 22 ; -3)$.

b) Tương tự, ta tính được $\vec{n} = (19 ; 39 ; 30)$.

Ví dụ 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120°. Tìm $|\vec{a}+\vec{b}|$ và $|\vec{a}-\vec{b}|$ biết $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

Giải

Ta có : $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$

$$= 9 + 25 + 2.3.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 19.$$

Vậy $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19}$.

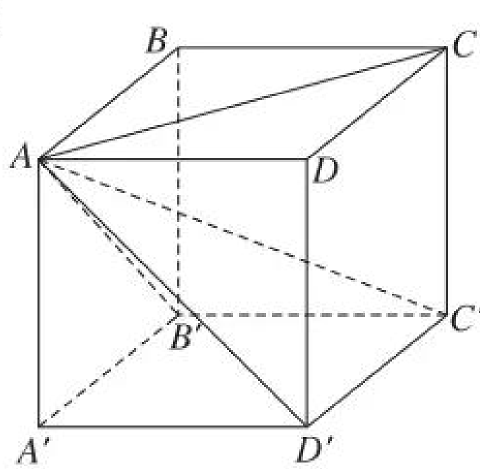
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$= 9 + 25 - 2.3.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

Vậy $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD'}$.



Hình 3.1

Giải

(h.3.1) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$ vì $ACC'A'$ là hình chữ nhật.

Tương tự : $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD}$ vì $ADC'B'$ là hình chữ nhật.

và $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB}$ vì $ABC'D'$ là hình chữ nhật.

Do đó $3\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AC'}$.

Ta suy ra $2\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}$.

Vậy $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'})$.

Ví dụ 4. Trong không gian cho ba điểm $A(1 ; 0 ; -2)$, $B(2 ; 1 ; -1)$, $C(1 ; -2 ; 2)$.

a) Tìm độ dài các cạnh của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1 ; -3 ; 3)$, $\overrightarrow{CA} = (0 ; 2 ; -4)$.

Do đó $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$,

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{19},$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

b) Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Ta có :

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}, \; y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}, \; z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Vậy $D = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Tương tự, $E = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $F = (1 ; -1 ; 0)$.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Giả sử $G = (x ; y ; z)$. Ta có : $\overrightarrow{GA} = (1 - x ; -y ; -2 - z)$

$$\overrightarrow{GB} = (2 - x ; 1 - y ; -1 - z)$$

$$\overrightarrow{GC} = (1 - x ; -2 - y ; 2 - z).$$

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = (4-3x\,;-1-3y\,;-1-3z)$.

Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên ta có :

$$\begin{cases}4-3x=0\\-1-3y=0\\-1-3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=-\dfrac{1}{3}\\z=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}\Rightarrow G=\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$$

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh các hệ thức vectơ

1. Phương pháp giải

Sử dụng quy tắc ba điểm đối với phép cộng, phép trừ vectơ và các tính chất của các phép toán về vectơ để biến đổi các hệ thức vectơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

b) Với điểm M bất kì trong không gian, hãy chứng minh rằng :

$$4\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}.$$

Giải

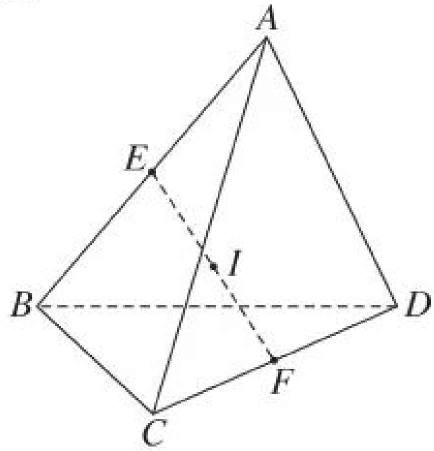
a) (h.3.2) Ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IE}$

$\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IF}$.

Do đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF})$.

Vì I là trung điểm của EF nên $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$,

suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.



Hình 3.2

b) Ta có $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}$

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI}$$

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI}$$

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DI}.$$

Do đó $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI}$.

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{DI} = \vec{0}$. Vậy $4\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện *ABCD*. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

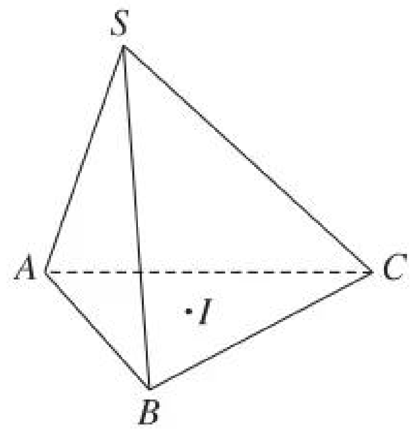
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Do đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}$. Vì $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ nên ta có

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Nhận xét. Trên đây ta đã biến đổi vế trái thành vế phải. Mặt khác ta cũng có thể biến đổi vế phải thành vế trái bằng phương pháp tương tự.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tam giác *S.ABC* với *I* là trọng tâm của tam giác đáy *ABC*. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.



Hình 3.3

Giải

(h.3.3)

Ta có $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA}$

$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}.$$

Do đó $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

Vì *I* là trọng tâm của tam giác *ABC* nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

VẤN ĐỀ 3

Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng

1. Phương pháp giải

– Sử dụng định nghĩa tích vô hướng và biểu thức toạ độ của tích vô hướng.

– Sử dụng các công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vectơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1\,;-2\,;3)$, $B(0\,;3\,;1)$, $C(4\,;2\,;2)$.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;

b) Tìm côsin của góc $\widehat{BAC}$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1\,;5\,;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(5\,;4\,;-1)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1.5+5.4+(-2).(-1)=27$.

b) $$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}=\frac{27}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}.\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{27}{\sqrt{30}.\sqrt{42}}=\frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2\,;0\,;1)$, $B(-1\,;2\,;3)$.

a) Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B.

b) Tìm côsin của các góc tạo bởi mỗi vectơ đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3\,;2\,;2)$ và $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+2^2+2^2}=\sqrt{17}$.

b) Các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ có toạ độ là : $\vec{i}=(1\,;0\,;0)$, $\vec{j}=(0\,;1\,;0)$, $\vec{k}=(0\,;0\,;1)$.

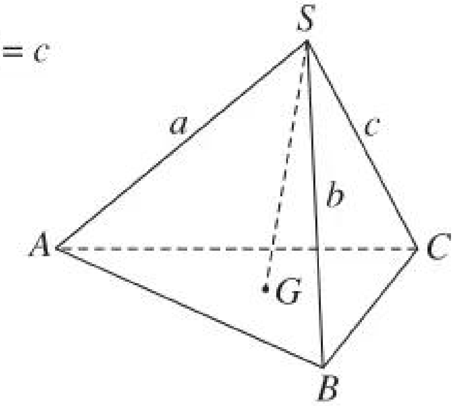
Do đó : $\cos(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\vec{i}.\overrightarrow{AB}}{|\vec{i}|.|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{-3}{\sqrt{17}}$

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\vec{j}.\overrightarrow{AB}}{|\vec{j}|.|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\vec{k}.\overrightarrow{AB}}{|\vec{k}|.|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{2}{\sqrt{17}}.$$

Ví dụ 3. Hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và có : $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{CSA} = \gamma$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Hãy tính khoảng cách SG.



Hình 3.4

Giải

(h.3.4) Theo Ví dụ 3 (Vấn đề 2) ta có :

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

$$(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})^2 = \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SC}^2 + 2.\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2.\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} + 2.\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\gamma + 2bc\cos\beta.$$

Do đó $SG = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\gamma + 2bc\cos\beta}$.

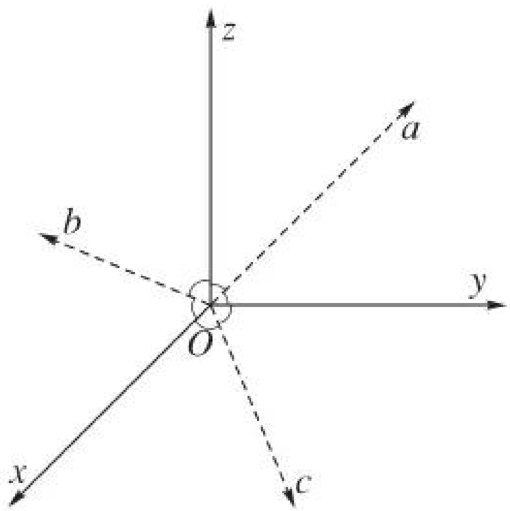
Ví dụ 4. Hệ trục $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Gọi Oa, Ob, Oc theo thứ tự là các tia phân giác của các góc $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$, $\widehat{xOy}$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ theo thứ tự là ba vectơ đơn vị trên ba tia phân giác ấy.

a) Hãy tính toạ độ các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, $\vec{b}.\vec{c}$, $\vec{c}.\vec{a}$ và từ đó suy ra góc giữa các cặp vectơ đó.

Giải

(h.3.5)



Hình 3.5

a) Vì tia Oa là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$ nên tia Oa tạo với hai tia Oy và Oz hai góc đều bằng $\frac{\pi}{4}$.

Do đó : $\vec{a} = \cos\frac{\pi}{4}\vec{j} + \cos\frac{\pi}{4}\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{a} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Tương tự, ta tính được :

$\vec{c} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; $\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Dùng cách tính tích vô hướng bằng biểu thức toạ độ ta có :

$$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2},\ \vec{b}.\vec{c} = \frac{1}{2},\ \vec{c}.\vec{a} = \frac{1}{2}.$$

Vì $|\vec{a}| = 1$ và $|\vec{b}| = 1$ mà $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$ nên ta suy ra $(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Tương tự, ta cũng có $(\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a}) = \frac{\pi}{3}$.

VẤN ĐỀ 4

Lập phương trình mặt cầu biết tâm và bán kính của mặt cầu đó

1. Phương pháp giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(a ; b ; c)$, bán kính r có dạng :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

2. Ví dụ

Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau đây :

a) Có đường kính AB với $A = (4 ; -3 ; 7)$, $B = (2 ; 1 ; 3)$.

b) Đi qua điểm $A = (5 ; -2 ; 1)$ và có tâm $C = (3 ; -3 ; 1)$.

Giải

a) Mặt cầu có tâm là trung điểm I của đoạn AB.

Ta có : $I = \left(\dfrac{4+2}{2}\,;\,\dfrac{-3+1}{2}\,;\,\dfrac{7+3}{2}\right) = (3\,;\,-1\,;\,5)$.

Gọi r là bán kính mặt cầu, ta có : $r = |\overrightarrow{IA}|$ với $\overrightarrow{IA} = (1\,;\,-2\,;\,2)$.

Do đó : $r = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$.

Vậy mặt cầu có phương trình là : $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

b) Mặt cầu cho trước có bán kính $r = |\overrightarrow{CA}|$ trong đó $\overrightarrow{CA} = (2\,;\,1\,;\,0)$.

Do đó : $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Vậy mặt cầu tâm $C(3\,;\,-3\,;\,1)$ đi qua điểm $A(5\,;\,-2\,;\,1)$ có phương trình là :

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

VẤN ĐỀ 5

Cho biết phương trình mặt cầu, hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó

1. Phương pháp giải

Biến đổi phương trình đã cho về dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

Khi đó mặt cầu đã cho có tâm $I = (a\,;\,b\,;\,c)$ và có bán kính bằng r.

2. Ví dụ

Cho mặt cầu có phương trình $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Giải

Phương trình mặt cầu đã cho có thể viết dưới dạng :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - \ - y + 5z - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{19}{6}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{19}{6}\right)^2.$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I=\left(1\ ;\ -\frac{4}{3}\ ;\ -\frac{5}{2}\right)$ và bán kính $r=\frac{19}{6}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

3.1. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(2\ ;\ -1\ ;\ 2)$, $\vec{b}=(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $\vec{c}=(-4\ ;\ 1\ ;\ -1)$. Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$ biết rằng :

a) $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$; b) $\vec{n}=2\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}$.

3.2 Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}=(1\ ;\ -3\ ;\ 4)$.

a) Tìm y_0 và z_0 để cho vectơ $\vec{b}=(2\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ cùng phương với $\vec{a}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{c}$ biết rằng $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ngược hướng và $|\vec{c}|=2|\vec{a}|$.

3.3. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M có toạ độ $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Ozx).

3.4. Cho hai bộ ba điểm :

a) $A=(1\ ;\ 3\ ;\ 1)$, $B=(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$, $C=(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$;

b) $M=(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $N=(-4\ ;\ 3\ ;\ 1)$, $P=(-9\ ;\ 5\ ;\ 1)$.

Hỏi bộ nào có ba điểm thẳng hàng ?

3.5. Trong không gian $Oxyz$, hãy tìm trên mặt phẳng (Oxz) một điểm M cách đều ba điểm $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(3\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

3.6. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$.

3.7. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, AD, BC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$.

3.8. Trong không gian cho ba vectơ tuỳ ý $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Gọi $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{v}=3\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{w}=2\vec{c}-3\vec{a}$.

Chứng tỏ rằng ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

3.9. Trong không gian $Oxyz$ cho một vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý khác vectơ $\vec{0}$. Gọi α, β, γ là ba góc tạo bởi ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trên ba trục Ox, Oy, Oz và vectơ $\vec{a}$.

Chứng minh rằng : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

3.10. Cho hình tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

b) Từ hệ thức trên hãy suy ra định lí : "Nếu một hình tứ diện có hai cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối diện thứ ba cũng vuông góc với nhau."

3.11. Tính tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ trong không gian với các toạ độ đã cho là :

a) $\vec{a} = (3 ; 0 ; -6)$, $\quad \vec{b} = (2 ; -4 ; c)$;

b) $\vec{a} = (1 ; -5 ; 2)$, $\quad \vec{b} = (4 ; 3 ; -5)$;

c) $\vec{a} = (0 ; \sqrt{2} ; \sqrt{3})$, $\quad \vec{b} = (1 ; \sqrt{3} ; -\sqrt{2})$.

3.12. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau :

a) $A(4 ; -1 ; 1)$, $\quad B(2 ; 1 ; 0)$;

b) $A(2 ; 3 ; 4)$, $\quad B(6 ; 0 ; 4)$.

3.13. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là :

$A(a ; 0 ; 0)$, $\quad B(0 ; b ; 0)$, $\quad C(0 ; 0 ; c)$.

Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.

3.14. Trong không gian $Oxyz$ hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau :

a) Có tâm $I(5 ; -3 ; 7)$ và có bán kính $r = 2$;

b) Có tâm là điểm $C(4 ; -4 ; 2)$ và đi qua gốc toạ độ ;

c) Đi qua điểm $M(2 ; -1 ; -3)$ và có tâm $C(3 ; -2 ; 1)$.

3.15. Trong không gian $Oxyz$ hãy xác định tâm và bán kính các mặt cầu có phương trình sau đây :

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 16z - 26 = 0$;

b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 4y - 12z - 100 = 0$.

3.16. Trong không gian $Oxyz$ hãy viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; -2 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 4)$ và gốc toạ độ O. Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.