CHƯƠNG I KHỐI ĐA DIỆN

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN

Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thoả mãn hai tính chất :

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như thế gọi là một *mặt* của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các *đỉnh, cạnh* của hình đa diện.

II- KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với khối đa diện ấy được gọi là *điểm trong* của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là *miền trong*, tập hợp các điểm ngoài được gọi là *miền ngoài* của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.

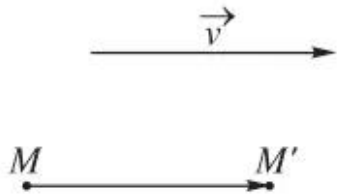
III- HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Phép biến hình trong không gian được gọi là *phép dời hình* nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tuỳ ý.

2. Một số phép dời hình thường gặp

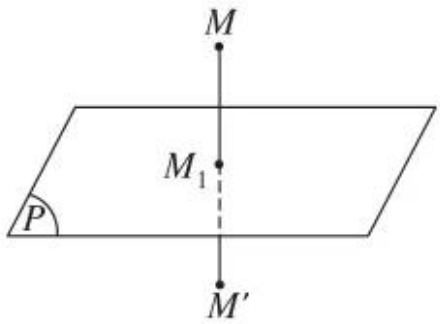
a) ***Phép tịnh tiến theo vectơ*** $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ (h.1.1).



Hình 1.1

b) ***Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)*** là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' (h.1.2).

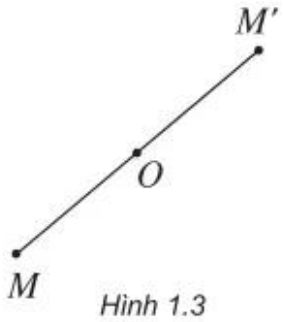
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là *mặt phẳng đối xứng* của (H).



Hình 1.2

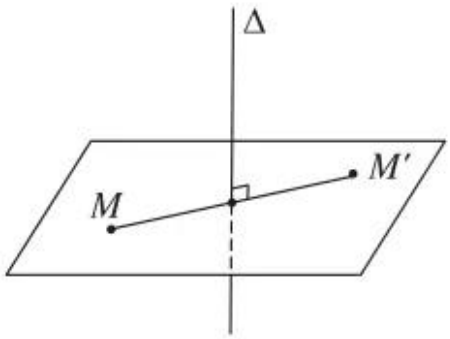
c) ***Phép đối xứng tâm O*** là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM' (h.1.3).

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là *tâm đối xứng* của (H).



Hình 1.3

d) ***Phép đối xứng qua đường thẳng*** Δ (hay phép đối xứng qua trục Δ) là phép biến hình biến mọi điểm thuộc Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM' (h.1.4). Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là *trục đối xứng* của (H).



Hình 1.4

3. Nhận xét

• Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.

• Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H') và biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').

Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

IV- PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1), (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép được hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Vấn đề 1

Chứng minh một số tính chất liên quan đến các đỉnh, các cạnh, các mặt của một khối đa diện

1. Phương pháp giải

Sử dụng tính chất a) và b) trong định nghĩa hình đa diện.

2. Ví dụ

Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của đúng ba mặt thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn. Cho ví dụ.

Giải

Gọi d là số các đỉnh của một khối đa diện (H). Vì mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của đúng ba mặt, nên mỗi đỉnh của nó có đúng ba cạnh đi qua. Như vậy qua d đỉnh có $3d$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh nối đúng hai đỉnh nên số các cạnh của (H) bằng $c = \frac{3d}{2}$.

Suy ra d phải là số chẵn.

Ví dụ : Hình tứ diện, hình hộp.

VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai đa diện bằng nhau

1. Phương pháp giải

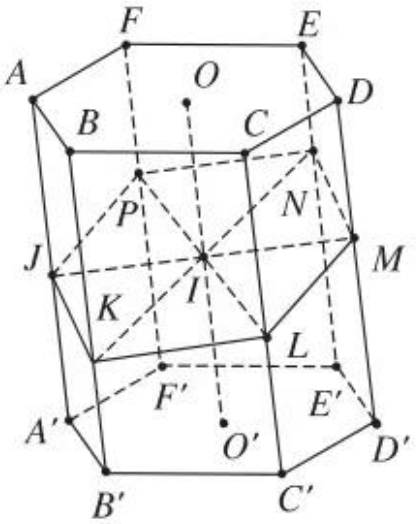
Chỉ ra một phép dời hình cụ thể đã được xác định biến đa diện này thành đa diện kia.

2.Ví dụ

Cho lăng trụ $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có đáy là những lục giác đều. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua I và cắt tất cả cạnh bên của lăng trụ. Chứng minh rằng (α) chia lăng trụ thành hai đa diện bằng nhau.

Giải

Giả sử mp (α) cắt AA', BB', CC', DD', EE', FF' lần lượt tại J, K, L, M, N, P (h.1.5). Dễ thấy I cũng là trung điểm của JM, KN và LP. Phép đối xứng tâm I biến các điểm $A, B, C, D, E, F, J, K, L, M, N, P$ lần lượt thành các điểm $D', E', F', A', B', C', M, N, P, J, K, L$. Do đó hai đa diện $ABCDEF.JKLMNP$ và $D'E'F'A'B'C'.MNPJKL$ bằng nhau vì có phép dời hình là phép đối xứng tâm I biến đa diện này thành đa diện kia.



Hình 1.5

VẤN ĐỀ 3

Phân chia hoặc lắp ghép các khối đa diện

1. Phương pháp giải

Chọn mặt phẳng thích hợp để phân chia khối đa diện. Trong nhiều trường hợp, để chứng minh rằng có thể lắp ghép các khối đa diện (H_1), (H_2),..., (H_n) thành khối đa diện (H) ta chứng minh rằng có thể chia được khối đa diện (H) thành các khối đa diện (H_1), (H_2),..., (H_n).

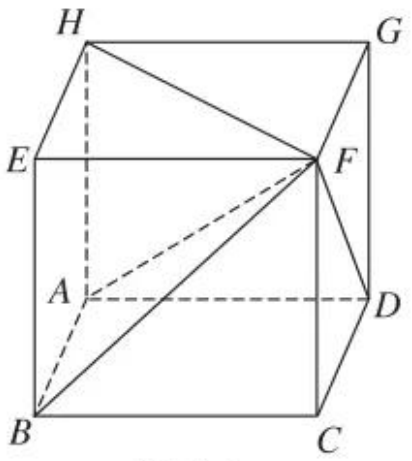
2. Ví dụ

Cho hình chóp tứ giác *F.ABCD* có đáy là hình vuông. Cạnh bên *FC* vuông góc với đáy và có độ dài bằng *AB*. Chứng minh rằng có thể dùng ba hình chóp bằng hình chóp trên để ghép lại thành một hình lập phương.

Giải

Từ hình chóp trên ta dựng hình lập phương *HEFG.ABCD* (h.1.6). Ta thấy hai hình chóp *F.ABCD* và *F.ABEH* đối xứng với nhau qua mặt phẳng (*ABF*), hai hình chóp *F.ABCD* và *F.AHGD* đối xứng với nhau qua mặt phẳng (*ADF*). Do đó ba hình chóp *F.ABCD*, *F.ABEH* và *F.AHGD* bằng nhau.

Như vậy có thể chia được hình lập phương *HEFG.ABCD* thành ba hình chóp bằng hình chóp *F.ABCD*. Từ đó suy ra có thể ghép ba hình chóp bằng hình chóp *F.ABCD* để thành một hình lập phương.



Hình 1.6

Nhận xét :

Để ý rằng phép đối xứng qua mặt phẳng (*FAC*) biến tứ diện *FACB* thành tứ diện *FACD*, do đó có thể chia hình chóp *F.ABCD* thành hai tứ diện bằng nhau : *FACB* và *FACD*. Làm tương tự đối với hai hình chóp *F.ABEH* và *F.AHGD* suy ra có thể chia một hình lập phương thành sáu hình tứ diện bằng nhau. (Bài tập 4, trang 12, SGK)

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.1. Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Chứng minh rằng hai tứ diện *A'ABD* và *CC'D'B'* bằng nhau.

1.2. Cho lăng trụ *ABC.A'B'C'*. Gọi *E*, *F*, *G* lần lượt là trung điểm của *AA'*, *BB'*, *CC'*. Chứng minh rằng các lăng trụ *ABC.EFG* và *EFG.A'B'C'* bằng nhau.

1.3. Chia hình chóp tứ giác đều thành tám hình chóp bằng nhau.

1.4. Chia một khối tứ diện đều thành bốn khối tứ diện bằng nhau.

1.5. Chứng minh rằng mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.