HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

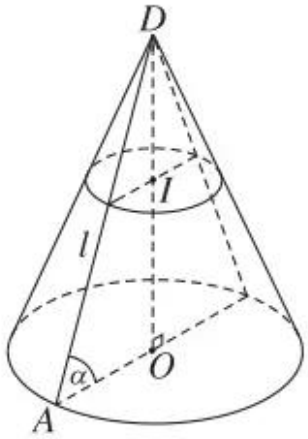
2.1. (h.2.21) a) Gọi r là bán kính của đường tròn đáy.

Ta có $OA = r = l\cos\alpha$ (với O là tâm của đường tròn đáy và A là một điểm trên đường tròn đó).

Ta suy ra : $S_{xq} = \pi rl = \pi l^2 \cos\alpha$.

Khối nón có chiều cao $h = DO = l\sin\alpha$. Do đó thể tích V của khối nón được tính theo công thức $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2.h$.

Vậy : $V = \frac{1}{3}\pi l^2 \cos^2\alpha . l\sin\alpha = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\alpha \sin\alpha$.



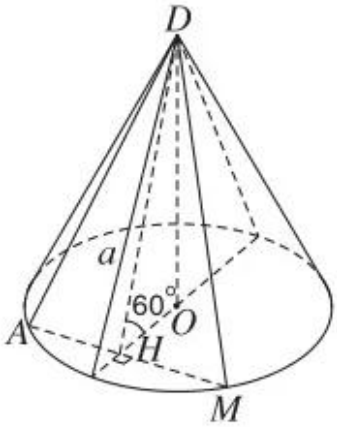
Hình 2.21

b) Thiết diện qua I và vuông góc với trục hình nón là một hình tròn bán kính r' với $\frac{r'}{r} = \frac{DI}{DO} = k$.

Gọi s là diện tích của thiết diện và S là diện tích của đáy hình nón ta có : $\frac{s}{S} = k^2 \Leftrightarrow s = k^2 S$, trong đó $S = \pi r^2 = \pi l^2 \cos^2\alpha$.

Vậy diện tích của thiết diện đi qua điểm I và vuông góc với trục hình nón là : $s = k^2 S = k^2 \pi l^2 \cos^2\alpha$.

2.2. (h.2.22) a) Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân cạnh a nên hình nón có đường sinh $l = a$, có bán kính đáy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, và có chiều cao $h = r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Hình 2.22

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón, ta có :

$$S_{xq} = \pi rl = \pi \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}.$$

Gọi S là diện tích đáy của hình nón, ta có $S = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích toàn phần của hình nón đã cho là :

$$S_{xq} + S = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{1}{2}\pi a^2(\sqrt{2}+1).$$

Hình nón có thể tích là : $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 . \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{2}$.

b) Xét mặt phẳng (DAM) đi qua đỉnh D tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°, cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và M. Từ tâm O của đường tròn đáy ta vẽ $OH \perp AM$, do vậy H là trung điểm của đoạn AM. Ta có $AM \perp (DOH)$ vì $AM \perp OH$ và $AM \perp DO$.

Vậy $\widehat{DHO} = 60^o$ và $\sin 60^o = \frac{DO}{DH}$ hay $DH = \frac{DO}{\sin 60^o} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Gọi $S_{\Delta DAM}$ là diện tích thiết diện cần tìm, ta có : $S_{\Delta DAM} = AH.DH$

mà $AH^2 = DA^2 - DH^2 = a^2 - \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{3}$, suy ra $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

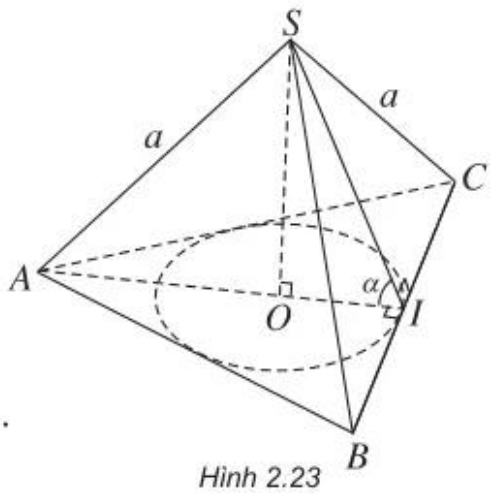
Vậy $S_{\Delta DAM} = AH.DH = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

2.3. (h.2.23) Gọi I là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của tam giác đều ABC. Theo giả thiết ta có $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{SIO} = \alpha$. Đặt $OI = r$, $SO = h$, ta có $AO = 2r$ và

$$\begin{cases} h = r\tan\alpha \\ a^2 = h^2 + 4r^2 \end{cases} \quad (\text{vì } SA^2 = SO^2 + AO^2).$$

Do đó $a^2 = r^2\tan^2\alpha + 4r^2 = r^2(\tan^2\alpha + 4)$.

Vậy $r = \frac{a}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$.



Hình 2.23

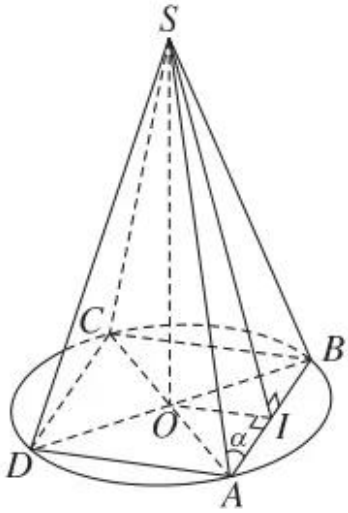
Hình nón nội tiếp có đường sinh là : $l = SI = \dfrac{r}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{\cos\alpha\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$.

Diện tích xung quanh của hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$ là :

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}} \cdot \frac{a}{\cos\alpha\sqrt{\tan^2\alpha + 4}},$$

hay $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{\cos\alpha(\tan^2\alpha + 4)}$.

2.4. (h.2.24) Gọi r là bán kính đáy của hình nón ta có $OA = r$, $SO = h$ và $SA = SB = SC = SD = l$ là đường sinh của hình nón. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có :



Hình 2.24

$$\begin{cases} SA^2 = SO^2 + OA^2 \\ AI = SA.\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 = h^2 + r^2 & (1) \\ \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = l\cos\alpha & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow r = \sqrt{2}\, l\cos\alpha$.

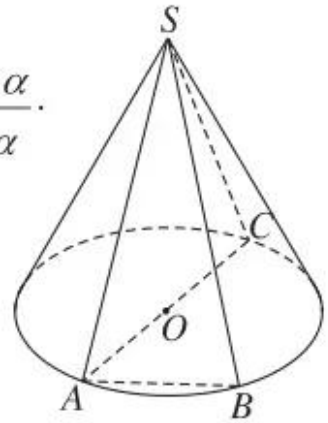
(1) $\Rightarrow l^2 = h^2 + 2l^2\cos^2\alpha \Rightarrow h^2 = l^2(1 - 2\cos^2\alpha) \Rightarrow l^2 = \dfrac{h^2}{1 - 2\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow l = \frac{h}{\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}}.$$

Do đó $r = \sqrt{2}\, l\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}h\cos\alpha}{\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}}$.

$$S_{xq} = \pi r l = \pi . \frac{\sqrt{2}h\cos\alpha}{\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}} \cdot \frac{h}{\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}} = \frac{\pi\sqrt{2}h^2\cos\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha}.$$

2.5. (h.2.25) Xét hai đường sinh SA, SB tuỳ ý của hình nón. Vẽ đường kính AC của đường tròn đáy. Ta có góc ASC là góc ở đỉnh của hình nón. Hai tam giác ASC và ASB có hai cặp cạnh bằng nhau vì chúng cùng là đường sinh của hình nón.



Hình 2.25

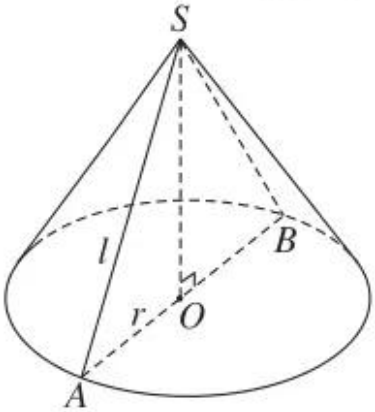
Ta có cạnh $AC \geq AB$ nên $\widehat{ASC} \geq \widehat{ASB}$. Đó là điều cần chứng minh.

2.6. (h.2.26) Theo giả thiết ta có góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{ASB} = \alpha = 120^{\circ}$. Gọi O là tâm của đường tròn đáy. Ta có : $\widehat{ASO} = 60^{\circ}$, và $\sin 60^{\circ} = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{r}{l}$ với l là độ dài đường sinh của hình nón.

Vậy $l = \dfrac{r}{\sin 60^{\circ}} = \dfrac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{24}{\sqrt{3}}$.

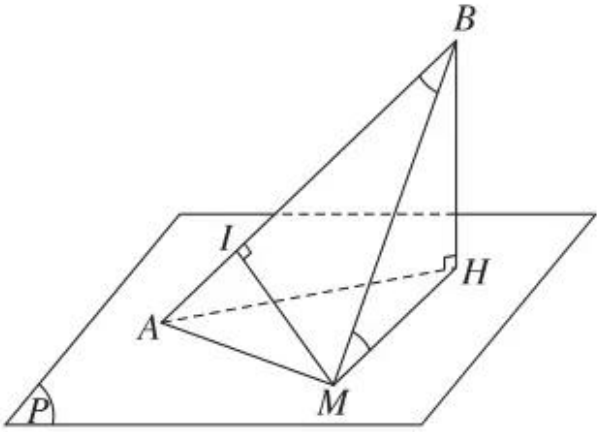
Khi có hai đường sinh vuông góc với nhau ta có tam giác vuông có diện tích là $\dfrac{1}{2}l^2$. Do đó diện tích của thiết diện là :

$S = \dfrac{1}{2}l^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{24^2}{3} = 96\,(\text{cm}^2)$.



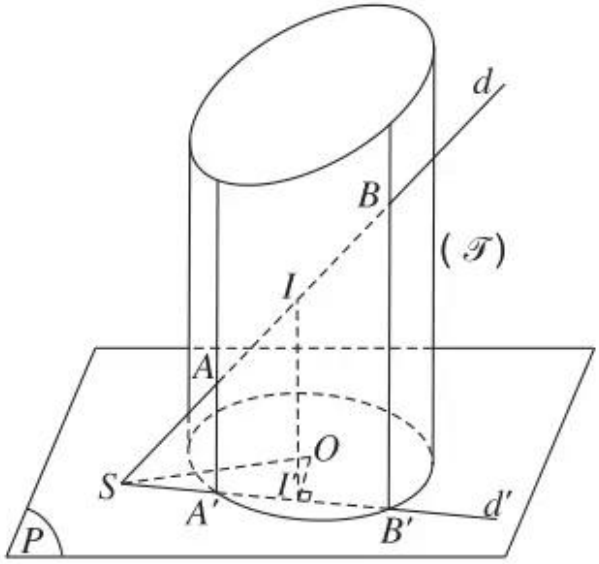
Hình 2.26

2.7. (h.2.27) Giả sử ta có điểm M thuộc mặt phẳng (P) thoả mãn các điều kiện của giả thiết đã cho. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Hai tam giác vuông BIM và MHB bằng nhau vì có cạnh huyền chung và một cặp góc nhọn bằng nhau. Do đó $MI = BH$ không đổi. Vậy điểm M luôn luôn nằm trên mặt trụ trục AB và có bán kính bằng BH.



Hình 2.27

2.8. (h.2.28) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với trục của mặt trụ $(\mathscr{T})$. Mặt phẳng (P) cắt $(\mathscr{T})$ theo một đường tròn tâm O. Ta hãy xét một vị trí của đường thẳng d. Gọi A, B là giao điểm của d với $(\mathscr{T})$ và I là trung điểm của đoạn AB. Chiếu A, B, I theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) ta được các điểm theo thứ tự là A', B', I' thẳng hàng với S,



Hình 2.28

trong đó A', B' nằm trên đường tròn tâm O trong mặt phẳng (P) và I' là trung điểm của đoạn $A'B'$. Do đó điểm I' luôn luôn nằm trên đường tròn đường kính SO trong mặt phẳng (P) và đường thẳng II' vuông góc với (P). Ta suy ra đường thẳng II' nằm trên mặt trụ $(\mathscr{T}')$ chứa đường tròn đường kính SO nằm trong (P) và có trục song song với trục của mặt trụ $(\mathscr{T})$. Tất nhiên, điểm I chỉ nằm trong phần mặt trụ $(\mathscr{T}')$ thuộc miền trong của mặt trụ $(\mathscr{T})$.

2.9. (h.2.29) a) Từ A và B dựng các đường sinh AA' và BB' ta có thiết diện qua AB và song song với trục là hình chữ nhật $AA'BB'$. Góc giữa AB và trục chính là góc $\widehat{ABB'}$. Do đó $\widehat{ABB'} = 30^{\circ}$. Vậy $AB' = BB' \tan 30^{\circ} = r\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = r$.

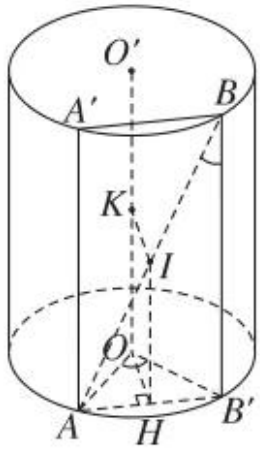
Do đó diện tích tứ giác $AA'BB'$ là $S_{AA'BB'} = AB'.BB' = r.r\sqrt{3} = r^2\sqrt{3}$.

b) Góc giữa hai bán kính đáy OA và $O'B$ là $\widehat{AOB'}$ hoặc $\widehat{A'O'B}$.

Vì $AB' = r$ nên AOB' là tam giác đều, do đó $\widehat{AOB'} = 60^{\circ}$.

c) Mặt phẳng (ABB') chứa AB và song song với trục OO' của hình trụ. Gọi H là trung điểm của AB'. Ta có $OH \perp (ABB')$. Đường thẳng qua H song song với OO' cắt AB tại I. Dựng $IK \parallel HO$ cắt OO' tại K. Ta chứng minh được IK là đoạn vuông góc chung của AB và OO'.

Ta có $IK = HO = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.



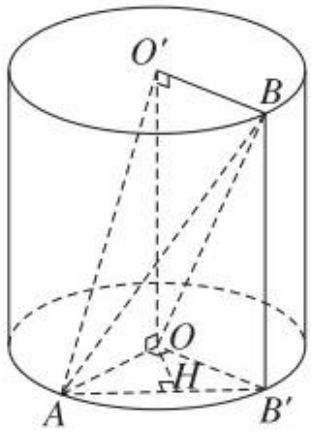
Hình 2.29

2.10. (h.2.30) a) Vì trục OO' vuông góc với các đáy nên $OO' \perp OA$ và $OO' \perp O'B$. Vậy các tam giác AOO' và $BO'O$ vuông tại O và O'.

Theo giả thiết ta có $AO \perp O'B$, mà $AO \perp OO'$ nên $AO \perp (OO'B)$. Do đó $AO \perp OB$, nên tam giác AOB vuông tại O. Tương tự, ta chứng minh được tam giác $AO'B$ vuông tại O'. Thể tích hình chóp $OABO'$ là

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta OO'B}.AO$$

hay $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} OO'.O'B.AO = \dfrac{1}{6} \cdot r\sqrt{2}.r^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{6} r^3$.



Hình 2.30

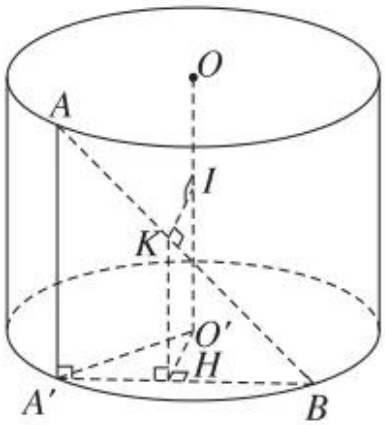
b) Ta có (α) là (ABB'). Vì $OO' // (\alpha)$, nên khoảng cách giữa OO' và (α) bằng khoảng cách từ O đến (α). Dựng $OH \perp AB'$ ta có $OH \perp (\alpha)$. Vậy khoảng cách cần tìm là $OH = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

c) Đường tròn tâm O có bán kính bằng $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ tiếp xúc với AB' tại H là trung điểm của AB'. Do đó mặt phẳng (α) song song với trục OO' chứa tiếp tuyến của đường tròn đáy, nên (α) tiếp xúc với mặt trụ dọc theo một đường sinh, với mặt trụ có trục OO' và có bán kính đáy bằng $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

2.11. (h.2.31) a) Ta có công thức $S_{xq} = 2\pi rl$ với $r = 50$ cm, $l = 50$ cm.

Do đó $S_{xq} = 2\pi.50.50 = \pi.5000$ (cm^2)

và $V = \pi r^2 h = 125\ 000.\pi$ (cm^3).



Hình 2.31

b) Giả sử đoạn thẳng AB có điểm mút A nằm trên đường tròn đáy tâm O và điểm mút B nằm trên đường tròn đáy tâm O'. Theo giả thiết ta có $AB = 100$ cm. Giả sử IK là đoạn vuông góc chung của trục OO' và đoạn AB với I thuộc OO' và K thuộc AB. Chiếu vuông góc đoạn AB xuống mặt phẳng đáy chứa đường tròn tâm O', ta có A', H, B lần lượt là hình chiếu của A, K, B.

Vì $KI \perp OO'$ nên IK song song với mặt phẳng $(O'BA')$, do đó $O'H // IK$ và $O'H = IK$. Ta suy ra $O'H \perp AB$ và $O'H \perp AA'$. Vậy $O'H \perp A'B$.

Xét tam giác vuông $AA'B$ ta có $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{100^2 - 50^2} = 50\sqrt{3}$.

Vậy $IK = O'H = \sqrt{O'A'^2 - A'H^2} = \sqrt{50^2 - \left(\dfrac{50\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 50\sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = 25$ (cm).

2.12. (h.2.32) Theo giả thiết ta có tam giác đáy ABC là tam giác đều.

Gọi I là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của tam giác đều ABC. Theo giả thiết ta có $SA = a$. Đặt $OI = r$, $SO = h$, ta có $AO = 2r$ và $\widehat{SIA} = \alpha$.

Do đó $\begin{cases} h = r\tan\alpha \\ a^2 = h^2 + 4r^2 \end{cases}$

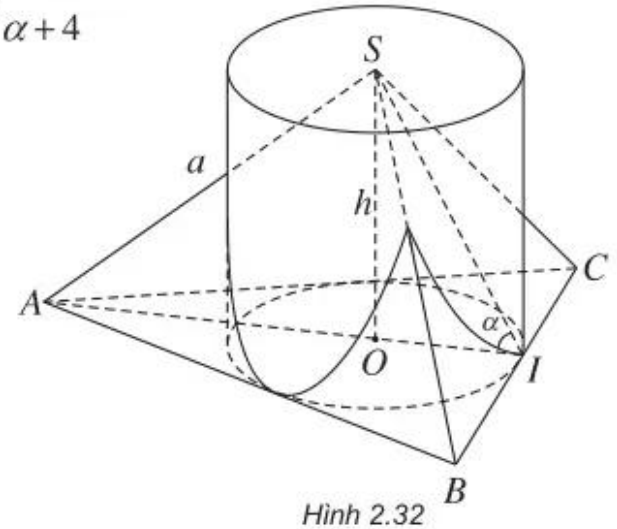
Vậy $a^2 = r^2 \tan^2 \alpha + 4r^2 = r^2(\tan^2 \alpha + 4)$.

Ta suy ra $r = \dfrac{a}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$ và $h = \dfrac{a \tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$.

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ ta có công thức $S_{xq} = 2\pi rl$ trong đó $r = \dfrac{a}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$ và $l = h = \dfrac{a \tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 4}}$.

Vậy $S_{xq} = 2\pi \cdot \dfrac{a^2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 4}$.

Các mặt bên SAB, SBC, SCA là những phần của ba mặt phẳng không song song với trục và cũng không vuông góc với trục nên chúng cắt mặt xung quanh của hình trụ theo những cung elip. Các cung này có hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng (ABC) tạo nên đường tròn đáy của hình trụ.



Hình 2.32