CHƯƠNG II MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I- SỰ TẠO THÀNH MẶT TRÒN XOAY

Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và chứa đường $\mathscr{C}$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ một góc 360° thì đường $\mathscr{C}$ tạo nên một mặt tròn xoay. Mặt tròn xoay đó nhận Δ làm *trục*, đường $\mathscr{C}$ được gọi là *đường sinh*.

II- TÍNH CHẤT CỦA MẶT TRÒN XOAY

– Nếu cắt mặt tròn xoay bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Δ ta được giao tuyến là các đường tròn có tâm trên Δ.

– Mỗi điểm M trên mặt tròn xoay đều nằm trên một đường tròn thuộc mặt tròn xoay và đường tròn này có tâm thuộc trục Δ.

III- MẶT NÓN TRÒN XOAY

1. Định nghĩa. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và d cắt nhau tại O tạo thành góc α với $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$. Mặt tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng d khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ gọi là *mặt nón tròn xoay đỉnh O*. Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón. Đường thẳng Δ gọi là *trục*, đường thẳng d gọi là *đường sinh*, góc 2α gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón tròn xoay.

2. *Tính chất*

a) Nếu cắt mặt nón tròn xoay đỉnh O bởi mặt phẳng đi qua đỉnh O ta có các trường hợp sau đây :

– Mặt phẳng cắt mặt nón theo hai đường sinh ;

– Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này người ta gọi mặt phẳng đó là *tiếp diện* của mặt nón ;

– Mặt phẳng chỉ có một điểm O chung duy nhất với mặt nón, ngoài ra không có một điểm chung nào khác.

b) Nếu cắt mặt nón tròn xoay đỉnh O bởi mặt phẳng (P) không đi qua đỉnh O ta có các trường hợp sau đây :

– Nếu mặt phẳng (P) cắt mọi đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là một đường elip hoặc là một đường tròn (khi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Δ của mặt nón) ;

– Nếu mặt phẳng (P) song song với chỉ một đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là một đường parabol ;

– Nếu mặt phẳng (P) song song với hai đường sinh của mặt nón, ta được giao tuyến là hai nhánh của một đường hypebol.

3. *Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay*

Cho tam giác OIM vuông tại I. Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình gọi là *hình nón tròn xoay* (hay *hình nón*). Hình tròn tâm I bán kính IM gọi là *mặt đáy*, điểm O gọi là *đỉnh*, độ dài OI gọi là *chiều cao* và độ dài OM gọi là *đường sinh* của hình nón đó.

Khối nón tròn xoay (hay *khối nón*) là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó.

4. *Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay*

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng r và có độ dài đường sinh bằng l.

Ta có công thức : $S_{xq} = \pi rl$.

Diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay bằng diện tích xung quanh của hình nón cộng diện tích đáy của hình nón.

5. Thể tích khối nón tròn xoay

Gọi V là thể tích của khối nón tròn xoay có chiều cao h và có diện tích đáy là B. Ta có công thức $V = \frac{1}{3}Bh$. Nếu bán kính đáy bằng r ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

IV- MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Định nghĩa. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh trục Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay gọi là *mặt trụ tròn xoay* và được gọi tắt là *mặt trụ*. Đường thẳng Δ gọi là *trục* của mặt trụ, đường thẳng l gọi là *đường sinh* của mặt trụ và r là bán kính của mặt trụ đó.

2. Tính chất

a) Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính bằng r) bởi một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Δ thì ta được một đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r.

b) Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính bằng r) bởi một mặt phẳng (α) không vuông góc với trục Δ, nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là đường elip có trục nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\frac{2r}{\sin\varphi}$ trong đó φ là góc giữa trục Δ và mặt phẳng (α) ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$).

c) Nếu M là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Δ và có bán kính r thì đường thẳng l' đi qua M và song song với Δ sẽ nằm trên mặt trụ đó và như vậy l' là một đường sinh của mặt trụ đã cho.

d) Cho mặt phẳng (α) song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay (có bán kính bằng r) và cách Δ một khoảng bằng h. Nếu $h < r$ thì mặt phẳng (α) cắt mặt trụ theo hai đường sinh, nếu $h = r$ thì mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh, còn nếu $h > r$ thì mặt phẳng (α) không cắt mặt trụ.

3. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, ví dụ cạnh AB, thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành một hình gọi là *hình trụ tròn xoay* (hay *hình trụ*).

Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ tạo ra hai hình tròn bằng nhau gọi là *hai đáy* của hình trụ, còn cạnh CD là *đường sinh* tạo ra *mặt xung quanh* của hình trụ. Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là *chiều cao* của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó. Khối trụ tròn xoay còn được gọi tắt là *khối trụ*. Ta gọi *mặt đáy, chiều cao, đường sinh* của một khối trụ theo thứ tự là mặt đáy, chiều cao, đường sinh của hình trụ tương ứng làm giới hạn cho khối trụ đó.

4. Diện tích xung quanh của hình trụ

Nếu gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy bằng r và có đường sinh bằng l ta có công thức :

$$S_{xq} = 2\pi rl.$$

Diện tích toàn phần của hình trụ tròn xoay bằng diện tích xung quanh của hình trụ đó cộng với diện tích hai đáy của hình trụ.

5. Thể tích khối trụ

Gọi V là thể tích khối trụ tròn xoay có chiều cao h và có diện tích đáy là B. Ta có công thức $V = Bh$. Nếu bán kính đáy bằng r ta có

$$V = \pi r^2 h.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

VẤN ĐỀ 1

Chứng minh đường thẳng d luôn luôn thuộc một mặt nón hay mặt trụ tròn xoay xác định

1. Phương pháp giải

Cần khai thác các tính chất của đường thẳng d qua các giả thiết của bài toán để đưa về kết luận d có thể thuộc mặt nón tròn xoay hoặc thuộc mặt trụ tròn xoay.

2. Ví dụ

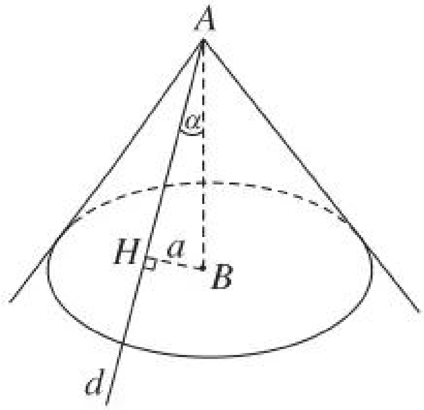
Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cố định. Một đường thẳng d di động luôn luôn đi qua A và cách B một đoạn không đổi $a = \frac{AB}{2}$. Chứng minh rằng d luôn luôn nằm trên một mặt nón tròn xoay.

Giải

(h.2.1) Ta hãy xét một vị trí tuỳ ý của đường thẳng d đi qua điểm A. Trong mặt phẳng (d, AB) kẻ $BH \perp d$ tại H và gọi $\alpha = \widehat{HAB}$.

Ta có $\sin\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}$.

Vậy α không đổi, suy ra d nằm trên mặt nón đỉnh A, nhận AB làm trục và có góc ở đỉnh bằng $2\alpha = 60^{\circ}$.

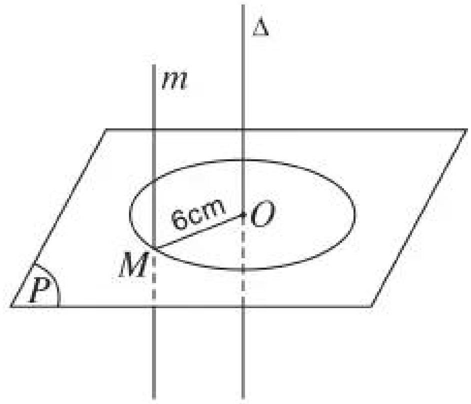


Hình 2.1

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O, bán kính $r = 6$ cm. Qua điểm M bất kì nằm trên đường tròn, ta kẻ đường thẳng m vuông góc với (P). Chứng minh rằng đường thẳng m nằm trên một mặt trụ tròn xoay xác định.

Giải

(h.2.2) Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại O. Vì $m \perp (P)$ nên $m \parallel \Delta$. Đường thẳng m luôn luôn cách đường thẳng Δ cố định một khoảng $OM = 6$ cm. Vậy đường thẳng m nằm trên mặt trụ tròn xoay nhận Δ làm trục và có bán kính $r = 6$ cm.



Hình 2.2

VẤN ĐỀ 2

Giải các bài toán tìm thiết diện của một mặt phẳng với khối nón. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón

1. Phương pháp giải

Sử dụng giả thiết và các tính chất của thiết diện tạo bởi mặt phẳng với hình nón (khối nón) để tính diện tích thiết diện, diện tích xung quanh, thể tích của khối nón. Sau khi xác định được các yếu tố có liên quan đến thiết diện, diện tích xung quanh hoặc thể tích của khối nón, cần khéo léo sử dụng các công thức tính diện tích trong hình học phẳng và tìm độ dài các đoạn thẳng dựa vào các hệ thức lượng trong tam giác.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy là 12 cm. Hãy xác định thiết diện của (P) với khối nón và tính diện tích thiết diện đó.

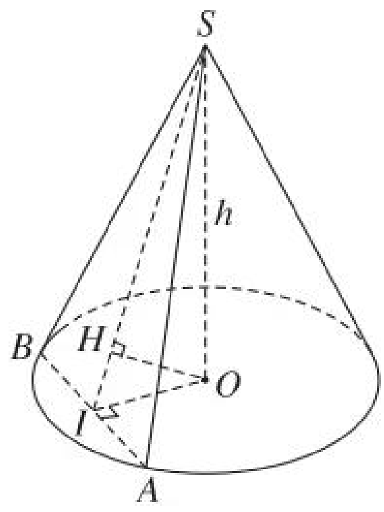
Giải

(h.2.3) Gọi S là đỉnh của khối nón. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau là $SA = SB$ nên ta có thiết diện là tam giác cân SAB.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có $OI \perp AB$. Từ tâm O của đáy ta kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có $OH \perp (SAB)$ và do đó theo giả thiết ta có $OH = 12$ cm. Xét tam giác vuông SOI ta có :

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}$$

$\Rightarrow OI = 15$ (cm).



Hình 2.3

Mặt khác, xét tam giác vuông SOI ta còn có : $OS.OI = SI.OH$.

Do đó $SI = \dfrac{OS.OI}{OH} = \dfrac{20.15}{12} = 25$ (cm).

Gọi S_t là diện tích thiết diện SAB. Ta có : $S_t = \dfrac{1}{2}AB.SI$, trong đó $AB = 2AI$.

Vì $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$ nên $AI = 20$ cm và $AB = 40$ cm.

Vậy thiết diện SAB có diện tích là : $S_t = \dfrac{1}{2} \cdot 40.25 = 500$ (cm^2).

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

Giải

(h.2.4) Khối nón có chiều cao bằng a và có bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$.

Do đó diện tích xung quanh của khối nón được tính theo công thức :

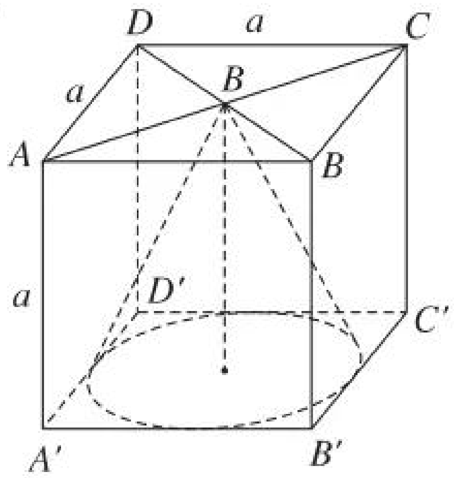
$$S_{xq} = \pi rl \text{ trong đó } l = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $S_{xq} = \pi \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$.

Thể tích của khối nón được tính theo công thức :

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a.$$

Vậy : $V = \dfrac{1}{12}\pi a^3$.



Hình 2.4

Ví dụ 3.

Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

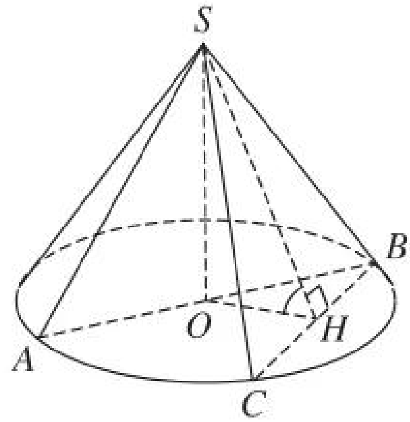
a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60°. Tính diện tích tam giác SBC.

Giải

a) (h.2.5) Giả sử cắt hình nón bởi mặt phẳng đi qua trục SO của hình nón đó là tam giác vuông cân SAB ($SA \perp SB$ và $AB = a\sqrt{2}$). Ta suy ra hình nón có bán kính đáy $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, chiều cao $h = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường sinh $l = a$.

Do đó : $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.



Hình 2.5

Diện tích đáy của hình nón là $S = \pi r^2 = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

Gọi V là thể tích khối nón ta có :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}.$$

b) Kẻ $OH \perp BC$ thì $SH \perp BC$, theo giả thiết ta có $\widehat{SHO} = 60^{\circ}$

$$\Rightarrow SH = \frac{SO}{\sin 60^{\circ}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó ta suy ra diện tích tam giác SBC là $S_{SBC} = SH.BH = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

VẤN ĐỀ 3

Cho các yếu tố để xác định mặt trụ tròn xoay hoặc khối trụ tròn xoay hoặc hình trụ tròn xoay. Giải các bài toán tìm thiết diện của một mặt phẳng với khối trụ, tính diện tích xung quanh của hình trụ và tính thể tích của khối trụ

1. Phương pháp giải

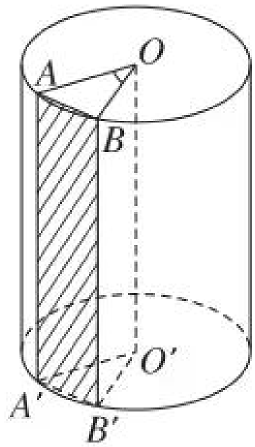
Sử dụng giả thiết và các tính chất của thiết diện tạo bởi mặt phẳng với hình trụ (khối trụ) để tính diện tích của thiết diện, diện tích xung quanh, thể tích của khối trụ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Một khối trụ có chiều cao bằng 20 cm và có bán kính đáy bằng 10 cm. Người ta kẻ hai bán kính OA và $O'B'$ lần lượt nằm trên hai đáy sao cho chúng hợp với nhau một góc bằng 30°. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với trục của khối trụ đó. Hãy tính diện tích của thiết diện.

Giải

(h.2.6) Từ một đáy của khối trụ ta vẽ hai bán kính OA, OB sao cho $\widehat{AOB} = 30^{\circ}$. Gọi A', O', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, O, B trên mặt đáy còn lại. Ta có OA và $O'B'$ tạo với nhau một góc 30°. Thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$ có :



Hình 2.6

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos 30^{\circ}$$

$$= 2r^2 - 2r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = r^2(2-\sqrt{3}) = 100(2-\sqrt{3}).$$

Vậy $AB = 10\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm.

Mặt khác ta có $AA' = BB' = OO' = 20$ cm.

Do đó thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$ có diện tích là :

$$S = AB \times BB' = 10\sqrt{2-\sqrt{3}} \times 20 = 200\sqrt{2-\sqrt{3}}\ (\text{cm}^2).$$

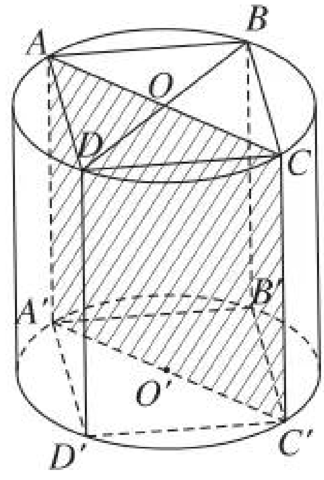
Ví dụ 2. Một khối trụ có bán kính đáy bằng r và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a) Tính diện tích xung quanh của khối trụ đó.

b) Tính thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho (hình lăng trụ này có đáy là hình vuông nội tiếp trong đường tròn đáy của hình trụ).

c) Gọi V là thể tích hình lăng trụ đều nội tiếp trong hình trụ và V' là thể tích khối trụ. Hãy tính tỉ số $\dfrac{V}{V'}$.

Giải



Hình 2.7

a) (h.2.7) Vì thiết diện qua trục hình trụ là một hình vuông nên đường sinh l bằng đường cao h và bằng $2r$. Do đó diện tích xung quanh của khối trụ đó là : $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi r^2$.

b) Gọi $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho. Ta có hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đáy. Do đó $AB = r\sqrt{2}$ và ta tính được thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho là : $V = S_{ABCD}.AA' = (r\sqrt{2})^2.2r = 4r^3$.

c) Gọi V' là thể tích khối trụ có bán kính đáy bằng r và có chiều cao bằng $2r$.

Ta có $V' = Bh = \pi r^2.2r = 2\pi r^3$. Vậy : $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{4r^3}{2\pi r^3} = \dfrac{2}{\pi}$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.1. Một hình nón tròn xoay có đỉnh là D, tâm của đường tròn đáy là O, đường sinh bằng l và có góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng α.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón được tạo nên.

b) Gọi I là một điểm trên đường cao DO của hình nón sao cho $\dfrac{DI}{DO} = k$ $(0 < k < l)$. Tính diện tích thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón.

2.2. Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng a.

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.

b) Một mặt phẳng đi qua đỉnh tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Tính diện tích thiết diện được tạo nên.

2.3. Cho $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều có các cạnh bên bằng a và có góc giữa các mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Hình nón đỉnh S có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp đã cho. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón này theo a và α.

2.4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao $SO = h$ và góc $\widehat{SAB} = \alpha$ $(\alpha > 45^{\circ})$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ của hình chóp.

2.5. Chứng minh rằng trong một khối nón tròn xoay, góc ở đỉnh là góc lớn nhất trong số các góc được tạo nên bởi hai đường sinh của khối nón đó.

2.6. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 12$ cm và có góc ở đỉnh là $\alpha = 120^{\circ}$. Hãy tính diện tích của thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau.

2.7. Cho mặt phẳng (P). Gọi A là một điểm nằm trên (P) và B là một điểm nằm ngoài (P) sao cho hình chiếu H của B trên (P) không trùng với A. Một điểm M chạy trên mặt phẳng (P) sao cho góc $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$. Chứng minh rằng điểm M luôn luôn nằm trên một mặt trụ tròn xoay có trục là AB.

2.8. Cho mặt trụ tròn xoay $(\mathscr{T})$ và một điểm S cố định nằm ngoài $(\mathscr{T})$. Một đường thẳng d thay đổi luôn luôn đi qua S cắt $(\mathscr{T})$ tại A và B. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng AB luôn luôn nằm trên một mặt trụ xác định.

2.9. Một khối trụ có bán kính đáy bằng r và chiều cao bằng $r\sqrt{3}$.

Gọi A và B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc được tạo thành giữa đường thẳng AB và trục của khối trụ bằng 30°.

a) Tính diện tích của thiết diện qua AB và song song với trục của khối trụ.

b) Tính góc giữa hai bán kính đáy qua A và B.

c) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và trục của khối trụ.

2.10. Một hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' bán kính r và có đường cao $h = r\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho OA vuông góc với $O'B$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện $OABO'$ là những tam giác vuông. Tính thể tích của tứ diện này.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với OO'. Tính khoảng cách giữa trục OO' và mặt phẳng (α).

c) Chứng minh rằng (α) tiếp xúc với mặt trụ trục OO' có bán kính bằng $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ dọc theo một đường sinh.

2.11. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao $h = 50$ cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.

b) Một đoạn thẳng có chiều dài 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

2.12. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và có góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng α. Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác đáy của hình chóp và có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp. Các mặt bên SAB, SBC, SCA cắt hình trụ theo những giao tuyến như thế nào ?